Лекция 1. Моделирование с помощью булевых переменных

Мельников Андрей Андреевич

Новосибирский Государственный Университет
Факультет Информационных Технологий
http://vk.com/fit2013_tdm/

16 февраля, 2013 г.

Предварительное содержание курса

дата	тема
16.02.2013	1. Моделирование с помощью булевых переменных
2.03.2013	2. Анализ качества математических моделей
16.03.2013	3. Матроиды
30.03.2013	4. Пересечение матроидов
13.04.2013	5. Рандомизированные алгоритмы
27.04.2013	6. Многокритериальная оптимизация
11.05.2013	7. Метаэвристики
25.05.2013	8. Двухуровневое программирование

Составляющие итоговой оценки

- Экзамен: 40
- Лабораторные работы: 4×5
- Контрольные работы: 2×5
- Домашние работы: 3×2
- Лекции: 8×2
- Семинары: 16×0.5

0-50 $\Longrightarrow$ «неуд»
51-75 $\Longrightarrow$ «удовл»
76-90 $\Longrightarrow$ «хор»
91-100 $\Longrightarrow$ «отл»

Содержание лекции

Определение

Примером оптимизационной задачи P (или *индивидуальной задачей*) называется тройка $I = (X, f, t)$, где

- X — некоторое множество,
- $f : X \to \mathbb{R}$ — некоторая функция,
- t — вид искомого экстремума, $\min$ или $\max$.

Элементы множества X называются *допустимыми решениями* (или просто *решениями*), функция f — *целевой функцией*.

Определение

Решение x^* называется *оптимальным решением* для примера $I = (X, f, t)$, если $f(x^*) \leqslant (\geqslant) f(x)$, $\forall x \in X$ и $t = \min(\max)$.

Определение

Задача оптимизации P — это множество всех примеров I задачи P

Определение

Задача оптимизации P называется *комбинаторной* или *дискретной*, если для каждого примера $I = (X, f, t) \in P$, множество X не более чем счетно.

Представление оптимизационных задач

$$(X, f, t)$$
$$\Downarrow$$

$$F(x) \to \operatorname*{extr}_{x}$$
$$\varphi_i(x) \leqslant 0, i = 1, \ldots, n$$

Представление оптимизационных задач

$$(X, f, t)$$
$$\Downarrow$$

$$F(x) \to \underset{x}{\text{extr}}$$
$$\varphi_i(x) \leqslant 0, i = 1, \ldots, n$$

Проблема моделирования

Как выбрать переменные x и функции $F(\cdot)$, $\varphi_i(\cdot)$, чтобы оптимальному (и допустимому) значению переменных x в модели соответствовало оптимальное (допустимое) решение оптимизационной задачи?

Представление оптимизационных задач

$$(X, f, t)$$
$$\Downarrow$$

$$F(x) \to \underset{x}{\text{extr}}$$
$$\varphi_i(x) \leqslant 0, i = 1, \ldots, n$$

Проблема моделирования

Как выбрать переменные x и функции $F(\cdot)$, $\varphi_i(\cdot)$, чтобы оптимальному (и допустимому) значению переменных x в модели соответствовало оптимальное (допустимое) решение оптимизационной задачи?
Какую модель выбрать, чтобы существующие или специально разрабатываемые алгоритмы поиска решений оптимизационных задач успешно с ней работали?

Линейные математические программы

Математическая программа (модель)

$$F(x) \to \underset{x}{\mathrm{extr}}$$
$$\varphi_i(x) \leqslant 0, i = 1, \ldots, n$$

называется *линейной*, если функции F, $\varphi_i, i = 1, \ldots, n$ линейно зависят от x.

Смешанно-целочисленные линейные программы

$MILP$ в стандартной форме

- $A \in \mathbb{Q}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{Q}^{m\times p}$, $b \in \mathbb{Q}^m$, $c \in \mathbb{Q}^n$, $d \in \mathbb{Q}^p$

$$
\begin{aligned}
cx + dy &\to \min_{x,y} \\
Ax + By &\geqslant b, \\
x &\geqslant 0, \\
y &\geqslant 0, \text{ целые}
\end{aligned}
$$

- множество решений
  $X = \{x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{Z}^p \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0, Ax + By \geqslant b\}$
- значения целевой функции $f(x,y) = cx + dy$, $\forall (x,y) \in X$

Важные частные случаи $MILP$

- задача линейного программирования, LP
  $x \geqslant 0,$
  $y \geqslant 0$
- задача булева (или 0–1) программирования
  $x \in \{0, 1\},$
  $y \in \{0, 1\}$
- задача смешанного булева программирования
  $x \geqslant 0,$
  $y \in \{0, 1\}$
- задача полностью целочисленного программирования, ILP
  $x \geqslant 0,$ целые,
  $y \geqslant 0,$ целые

Замечание

Любая целочисленная переменная x, принимающая значения из отрезка $[0, U]$ может быть представлена с помощью U булевых переменных $x_j \in \{0, 1\}$:

$$x = \sum_{j=1}^{U} x_j$$

Замечание

Любая целочисленная переменная x, принимающая значения из отрезка $[0, U]$ может быть представлена с помощью U булевых переменных $x_j \in \{0, 1\}$:

$$x = \sum_{j=1}^{U} x_j$$

Вопрос

Можно ли сократить число булевых переменных в представлении x?

Замечание

Любая целочисленная переменная x, принимающая значения из отрезка $[0, U]$ может быть представлена с помощью U булевых переменных $x_j \in \{0, 1\}$:

$$x = \sum_{j=1}^{U} x_j$$

Вопрос

Можно ли сократить число булевых переменных в представлении x?

Да!

$$x = \sum_{j=0}^{\lfloor log_2 U \rfloor} 2^j x_j$$

Правила моделирования

Моделирование логических отношений

Пусть I *— конечное множество индексов,* $x_i \in \{0,1\}$, $i \in I$ *и* $0 \leqslant y \leqslant 1$. *Тогда импликация «если* $x_i = 0$ *для всех* $i \in I$, *то* $y = 0$*» моделируется неравенством*

$$y \leqslant \sum_{i \in I} x_i. \tag{1}$$

Правила моделирования

Моделирование логических отношений

Пусть I — конечное множество индексов, $x_i \in \{0,1\}$, $i \in I$ и $0 \leqslant y \leqslant 1$. Тогда импликация «если $x_i = 0$ для всех $i \in I$, то $y = 0$» моделируется неравенством

$$y \leqslant \sum_{i \in I} x_i. \tag{1}$$

Почему это так?
Если $x_i = 0$ для всех $i \in I$, то $\sum_{i \in I} x_i = 0$. (1) превращается в $y \leqslant 0$, и $y = 0$ остается единственным допустимым значением.
Важно заметить, что неравенство (1) не порождает лишних ограничений: если $x_i = 1$ для некоторого i, то $\sum_{i \in I} x_i \geqslant 1$ и (1) допускает все возможные значения y.

Правила моделирования

Следствие

Пусть $0 \leqslant y \leqslant c$. *Тогда импликация*
«если $x_i = 0$ *для всех* $i \in I$, *то* $y = 0$*» моделируется неравенством*

$$y \leqslant c \sum_{i \in I} x_i. \tag{2}$$

Задача размещения предприятий. Facility (Plant) location problem. FLP.

- Дано:
  I — множество мест возможного размещения предприятий
  J — множество потребителей
  c_i — затраты на открытие предприятия в месте i
  d_{ij} — стоимость обслуживания потребителя j предприятием i
- Определить места размещения предприятий и схему обслуживания потребителей так, чтобы все потребители были обслужены и суммарные затраты были минимальными.

Задача размещения предприятий. Facility (Plant) location problem. FLP.

Переменные:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{если в месте } i \text{ открыто предприятие,} \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если потребитель } j \text{ обслуживается в предприятии } i, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Задача размещения предприятий. Facility (Plant) location problem. FLP.

Ограничения:

1. Каждый потребитель должен быть обслужен.

$$\sum_{i \in I} y_{ij} = 1 \quad \forall j \in J$$

.

2. Если предприятие i закрыто, то потребитель j не может облуживаться в i, то есть

$$\text{если } x_i = 0, \text{ то } y_{ij} = 0, \text{ для каждого } i \in I, j \in J.$$

В виде неравенства:

$$y_{ij} \leqslant x_i, \quad \forall i \in I, \forall j \in J.$$

Задача размещения предприятий. Facility (Plant) location problem. FLP.

Математическая модель

$$\min_{(x_i),(y_{ij})} \left(\sum_{i \in I} c_i x_i + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} d_{ij} y_{ij} \right)$$

$$\sum_{i \in I} y_{ij} = 1 \quad \forall j \in J,$$

$$y_{ij} \leqslant x_i \quad \forall i \in I, \forall j \in J,$$

$$x_i, y_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I, \forall j \in J.$$

Задача размещения предприятий с ограничениями на мощности производства. CFLP.

- Дано:
  I — множество мест возможного размещения предприятий
  J — множество потребителей
  c_i — затраты на открытие предприятия в месте i
  d_{ij} — удельные затраты на доставку потребителю j продукции предприятия i
  u_i — производственная мощность предприятия i
  b_j — потребность потребителя j
- Определить, в каких пунктах следует разместить предприятия и как организовать поставки, чтобы полностью удовлетворить потребительский спрос с наименьшими суммарными затратами.

Задача размещения предприятий с ограничениями на мощности производства. CFLP.

Переменные:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{если в месте } i \text{ открыто предприятие,} \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$y_{ij} \geqslant 0$ — количество продукции, поставляемое потребителю j предприятием i.

Задача размещения предприятий с ограничениями на мощности производства. CFLP.

Ограничения:

1. Потребности каждого потребителя должны быть удовлетворены

$$\sum_{i \in I} y_{ij} = b_j, \forall j \in J$$

2. Закрытое предприятие никого не снабжает и, если в i открыто предприятие, оно отправляет потребителям не более u_i продукции, т. е.

$$0 \leqslant \sum_{j \in J} y_{ij} \leqslant u_i \text{ и, если } x_i = 0, \text{ то } \sum_{j \in J} y_{ij} = 0$$

В виде неравенства:

$$\sum_{j \in J} y_{ij} \leqslant u_i x_i, \forall i \in I.$$

Задача размещения предприятий с ограничениями на мощности производства. CFLP.

Математическая модель

$$\min_{(x_i),(y_{ij})} \left(\sum_{i \in I} c_i x_i + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} d_{ij} y_{ij} \right)$$

$$\sum_{i \in I} y_{ij} = b_j, \forall j \in J,$$

$$\sum_{j \in J} y_{ij} \leqslant u_i x_i, \forall i \in I,$$

$$x_i \in \{0, 1\}, \forall i \in I,$$

$$y_{ij} \geqslant 0, \forall i \in I, \forall j \in J.$$

Правила моделирования

Моделирование логических отношений. Продолжение

... импликация «если $x_i = 0$ для всех $i \in I$, то $y = 0$» моделируется неравенством (1):

$$y \leqslant \sum_{i \in I} x_i.$$

Правила моделирования

Моделирование логических отношений. Продолжение

... импликация «если $x_i = 0$ для всех $i \in I$, то $y = 0$» моделируется неравенством (1):

$$y \leqslant \sum_{i \in I} x_i.$$

Для некоторого $I_1 \subseteq I$ определим новые переменные $z_i, i \in I_1$ по правилу $z_i = 1 - x_i$, и пусть $I_0 = I \backslash I_1$.

Правила моделирования

Моделирование логических отношений. Продолжение

... импликация «если $x_i = 0$ для всех $i \in I$, то $y = 0$» моделируется неравенством (1):

$$y \leqslant \sum_{i \in I} x_i.$$

Для некоторого $I_1 \subseteq I$ определим новые переменные $z_i, i \in I_1$ по правилу $z_i = 1 - x_i$, и пусть $I_0 = I \backslash I_1$.
Исходная импликация превращается в:
«если $x_i = 0$ для всех $i \in I_0$ и $z_i = 1$ для всех $i \in I_1$, то $y = 0$».

Правила моделирования

Моделирование логических отношений. Продолжение

... импликация «если $x_i = 0$ *для всех* $i \in I$, *то* $y = 0$*» моделируется неравенством (1):*

$$y \leqslant \sum_{i \in I} x_i.$$

Для некоторого $I_1 \subseteq I$ *определим новые переменные* $z_i, i \in I_1$ *по правилу* $z_i = 1 - x_i$, *и пусть* $I_0 = I \backslash I_1$.
Исходная импликация превращается в:
«если $x_i = 0$ *для всех* $i \in I_0$ *и* $z_i = 1$ *для всех* $i \in I_1$, *то* $y = 0$*».*
Подставляя в (1) $x_i = 1 - z_i \, \forall i \in I_1$, *имеем:*

$$y \leqslant \sum_{i \in I_0} x_i + \sum_{i \in I_1} (1 - z_i) \tag{3}$$

Правила моделирования

Моделирование логических отношений. Продолжение

После приведения подобных неравенство (3) можно переписать в более компактном виде:

$$\sum_{i \in I_1} z_i - \sum_{i \in I_0} x_i + y \leqslant |I_1|$$

Вопрос

Импликация
«если $x_i = 0$ *для всех* $i \in I_0$ *и* $z_i = 1$ *для всех* $i \in I_1$, *то* $y = 1$*»*
моделируется неравенством:

A: $\sum\limits_{i \in I_1} z_i - \sum\limits_{i \in I_0} x_i - y \leqslant |I_0| - 1$

B: $\sum\limits_{i \in I_1} z_i - \sum\limits_{i \in I_0} x_i - y \leqslant |I_0|$

C: $\sum\limits_{i \in I_1} z_i - \sum\limits_{i \in I_0} x_i - y \leqslant |I_1| + 1$

D: $\sum\limits_{i \in I_1} z_i - \sum\limits_{i \in I_0} x_i - y \leqslant |I_1| - 1$

Моделирование выбора ближайшего предприятия

В задачах размещения потребители могут захотеть выбирать обслуживающее предприятие самостоятельно. Например, по критерию удаленности от дома.

Моделирование выбора ближайшего предприятия

В задачах размещения потребители могут захотеть выбирать обслуживающее предприятие самостоятельно. Например, по критерию удаленности от дома.

C_{ij} — множество всех предприятий, которые находятся к потребителю j ближе, чем предприятие i.

Моделирование выбора ближайшего предприятия

В задачах размещения потребители могут захотеть выбирать обслуживающее предприятие самостоятельно. Например, по критерию удаленности от дома.

C_{ij} — множество всех предприятий, которые находятся к потребителю j ближе, чем предприятие i. Тогда

$$\text{если } x_i = 1 \text{ и } x_t = 0 \text{ для всех } t \in C_{ij}, \text{ то } y_{ij} = 1.$$

Моделирование выбора ближайшего предприятия

В задачах размещения потребители могут захотеть выбирать обслуживающее предприятие самостоятельно. Например, по критерию удаленности от дома.

C_{ij} — множество всех предприятий, которые находятся к потребителю j ближе, чем предприятие i. Тогда

$$\text{если } x_i = 1 \text{ и } x_t = 0 \text{ для всех } t \in C_{ij}, \text{ то } y_{ij} = 1.$$

В виде неравенства

$$1 - y_{ij} \leqslant (1 - x_i) + \sum_{t \in C_{ij}} x_t \text{ или } y_{ij} \geqslant x_i - \sum_{t \in C_{ij}} x_t,$$

где x_i, $y_{ij} \in \{0, 1\}$ (см. FLP)

Моделирование транзитивности

Задан граф $G = (V, E)$.

Моделирование транзитивности

Задан граф $G = (V, E)$.

Если в G существует путь из v_1 в v_2 и из v_2 в v_3, то есть и путь из v_1 в v_3. Таким образом отношение «быть достижимым из» является транзитивным. Это свойство можно описать линейными неравенствами!

Пусть $x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если между вершинами } i \text{ и } j \text{ есть путь} \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$.

Пусть $x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если между вершинами } i \text{ и } j \text{ есть путь} \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}.$

Для любой тройки вершин (i, j, k) если $x_{ij} = 1$ и $x_{jk} = 1$, то $x_{ik} = 1$.

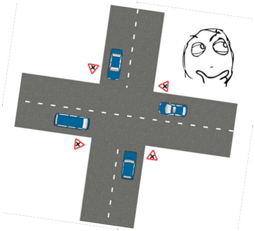
Пусть $x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если между вершинами } i \text{ и } j \text{ есть путь} \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$.

Для любой тройки вершин (i, j, k) если $x_{ij} = 1$ и $x_{jk} = 1$, то $x_{ik} = 1$.

Пользуясь правилом моделирования импликаций, получаем следующую группу линейных неравенств:

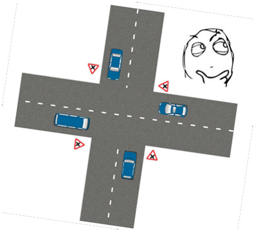
$$x_{ij} + x_{jk} - x_{ik} \leqslant 1. \forall i, j, k \in V$$

Моделирование отношения порядка (транзитивность и антисимметричность)



Работы выполняются на одном станке. Очередная работа не может начаться, пока не закончится предыдущая работа

Моделирование отношения порядка (транзитивность и антисимметричность)



Работы выполняются на одном станке. Очередная работа не может начаться, пока не закончится предыдущая работа

Пусть $x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если работа } i \text{ выполняется до работы } j \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$

$x_{ii} = 0 \quad \forall i \in I$

В силу антисимметричности: $x_{ij} = 1 - x_{ji}$ с $i \neq j$.

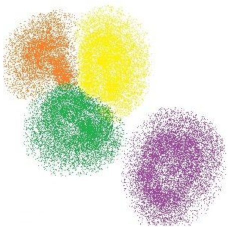
Моделирование отношения порядка (транзитивность и антисимметричность)

Для каждой тройки работ i, j и k должно выполняться отношение транзитивности.
Убедитесь, что в результате получится следующая система неравенств:

$$x_{ij} + x_{jk} - x_{ik} \leqslant 1 \text{ для любых } (i, j, k), i < j < k$$

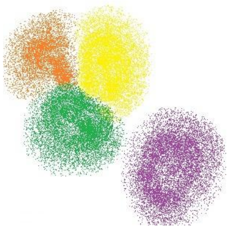
$$(1 - x_{ij}) - x_{jk} + x_{ik} \leqslant 1 \text{ для любых } (i, j, k), i < j < k$$

Моделирование отношения эквивалентности (рефлексивность, транзитивность и симметричность)



В задачах кластеризации некоторое конечное множество объектов требуется разделить на подмножества по принципу «схожести».

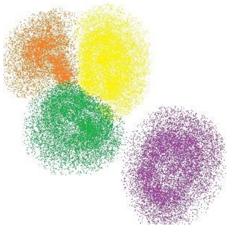
Моделирование отношения эквивалентности (рефлексивность, транзитивность и симметричность)



В задачах кластеризации некоторое конечное множество объектов требуется разделить на подмножества по принципу «схожести».

Пусть $x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если объекты } i \text{ и } j \text{ лежат в одном подмножестве} \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$

Моделирование отношения эквивалентности (рефлексивность, транзитивность и симметричность)



В задачах кластеризации некоторое конечное множество объектов требуется разделить на подмножества по принципу «схожести».

Пусть $x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если объекты } i \text{ и } j \text{ лежат в одном подмножестве} \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$

В силу симметричности и рефлексивности: $x_{ji} = x_{ij}$, $x_{ii} = 1$.

Моделирование отношения эквивалентности (транзитивность и симметричность)

- если i и j в одном подмножестве, j и k в одном подмножестве, то i и k, также в одном подмножестве

$$x_{ij} + x_{jk} - x_{ik} \leqslant 1 \text{ для любых } (i, j, k), i < j < k.$$

Моделирование отношения эквивалентности (транзитивность и симметричность)

- если i и j в одном подмножестве, j и k в одном подмножестве, то i и k, также в одном подмножестве

$$x_{ij} + x_{jk} - x_{ik} \leqslant 1 \text{ для любых } (i, j, k), i < j < k.$$

- если i и j в одном подмножестве, i и k в одном подмножестве, то j и k, также в одном подмножестве

$$x_{ij} + x_{ik} - x_{jk} \leqslant 1 \text{ для любых } (i, j, k), i < j < k.$$

Моделирование отношения эквивалентности (транзитивность и симметричность)

- если i и j в одном подмножестве, j и k в одном подмножестве, то i и k, также в одном подмножестве

$$x_{ij} + x_{jk} - x_{ik} \leqslant 1 \text{ для любых } (i, j, k), i < j < k.$$

- если i и j в одном подмножестве, i и k в одном подмножестве, то j и k, также в одном подмножестве

$$x_{ij} + x_{ik} - x_{jk} \leqslant 1 \text{ для любых } (i, j, k), i < j < k.$$

- если i и k в одном подмножестве, j и k в одном подмножестве, то i и j, также в одном подмножестве

$$x_{ik} + x_{jk} - x_{ij} \leqslant 1 \text{ для любых } (i, j, k), i < j < k.$$

Моделирование выбора минимального элемента

Как выбрать минимум из двух неотрицательных чисел?

$y = \min(u_1, u_2), u_1 \geqslant 0, u_2 \geqslant 0$

Моделирование выбора минимального элемента

Нужно, чтобы выполнялось:

Моделирование выбора минимального элемента

Нужно, чтобы выполнялось:

$$y \leqslant u_1 \text{ и } y \leqslant u_2,$$

Моделирование выбора минимального элемента

Нужно, чтобы выполнялось:

$$y \leqslant u_1 \text{ и } y \leqslant u_2,$$

$$y \geqslant u_1 \text{ или } y \geqslant u_2.$$

Моделирование выбора минимального элемента

Нужно, чтобы выполнялось:

$$y \leqslant u_1 \text{ и } y \leqslant u_2,$$

$$y \geqslant u_1 \text{ или } y \geqslant u_2.$$

Пусть

- $x = \begin{cases} 1, & \text{если неравенство } y \geqslant u_1 \text{ выполняется} \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$

Моделирование выбора минимального элемента

Нужно, чтобы выполнялось:

$$y \leqslant u_1 \text{ и } y \leqslant u_2,$$

$$y \geqslant u_1 \text{ или } y \geqslant u_2.$$

Пусть

- $x = \begin{cases} 1, & \text{если неравенство } y \geqslant u_1 \text{ выполняется} \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$
- W — некоторое большое положительное число.

Моделирование выбора минимального элемента

$y = \min(u_1, u_2), u_1 \geqslant 0, u_2 \geqslant 0$

- $y \leqslant u_1$
- $y \leqslant u_2$

Моделирование выбора минимального элемента

$y = \min(u_1, u_2), u_1 \geqslant 0, u_2 \geqslant 0$

- $y \leqslant u_1$
- $y \leqslant u_2$
- $y \geqslant u_1 - W(1 - x)$
- $y \geqslant u_2 - Wx$

$x \in \{0, 1\}$

Вопрос

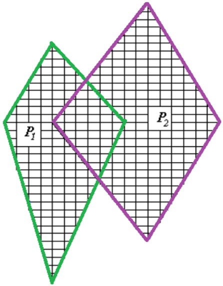
Системой неравенств

$$\begin{aligned}
&y \leqslant u_1\\
&y \leqslant u_2\\
&y \geqslant u_1 - W(1-x)\\
&y \geqslant u_2 - Wx\\
&y \geqslant 0,\\
&x \in \{0,1\}
\end{aligned}$$

моделируется выбор минимального элемента $y = \min(u_1, u_2)$. Какое минимальное значение большой константы W можно можно использовать при $u_1 = 3, u_2 = 5$?

Моделирование объединения событий

Пусть допустимая область образована объединением двух многоугольников P_1 и P_2:



Моделирование объединения событий

Многоугольники задаются группами неравенств.

P_1 :

$$\begin{aligned} 2y_1 + y_2 &\geqslant 4 \\ y_1 - y_2 &\geqslant -4 \\ -4y_1 + 3y_2 &\geqslant -8 \\ 2y_1 + 3y_2 &\leqslant 22 \\ y_1, y_2 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

P_2 :

$$\begin{aligned} 3y_1 + 4y_2 &\geqslant 22 \\ -3y_1 + 4y_2 &\leqslant 10 \\ y_1 + y_2 &\leqslant 13 \\ y_1 - y_2 &\leqslant 5 \\ y_1, y_2 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Решение является допустимым, если оно удовлетворяет хотя бы одной группе неравенств.

Моделирование объединения событий. Первый способ

Преобразуем ограничения к виду $Ax \leqslant b$:

P_1 :

$$\begin{aligned} -2y_1 - y_2 &\leqslant -4 \\ -y_1 + y_2 &\leqslant 4 \\ 4y_1 - 3y_2 &\leqslant 8 \\ 2y_1 + 3y_2 &\leqslant 22 \\ y_1, y_2 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

P_2 :

$$\begin{aligned} -3y_1 - 4y_2 &\leqslant -22 \\ -3y_1 + 4y_2 &\leqslant 10 \\ y_1 + y_2 &\leqslant 13 \\ y_1 - y_2 &\leqslant 5 \\ y_1, y_2 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Моделирование объединения событий. Первый способ

Преобразуем ограничения к виду $Ax \leqslant b$:

P_1 :

$$\begin{aligned} -2y_1 - y_2 &\leqslant -4 \\ -y_1 + y_2 &\leqslant 4 \\ 4y_1 - 3y_2 &\leqslant 8 \\ 2y_1 + 3y_2 &\leqslant 22 \\ y_1, y_2 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

P_2 :

$$\begin{aligned} -3y_1 - 4y_2 &\leqslant -22 \\ -3y_1 + 4y_2 &\leqslant 10 \\ y_1 + y_2 &\leqslant 13 \\ y_1 - y_2 &\leqslant 5 \\ y_1, y_2 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Заведем индикаторную переменную:

$$x = \begin{cases} 1, & \text{если выполнена группа неравенств для } P_1 \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Моделирование объединения событий. Первый способ

Преобразуем ограничения к виду $Ax \leqslant b$:

P_1 :

$$\begin{aligned} -2y_1 - y_2 &\leqslant -4 \\ -y_1 + y_2 &\leqslant 4 \\ 4y_1 - 3y_2 &\leqslant 8 \\ 2y_1 + 3y_2 &\leqslant 22 \\ y_1, y_2 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

P_2 :

$$\begin{aligned} -3y_1 - 4y_2 &\leqslant -22 \\ -3y_1 + 4y_2 &\leqslant 10 \\ y_1 + y_2 &\leqslant 13 \\ y_1 - y_2 &\leqslant 5 \\ y_1, y_2 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Заведем индикаторную переменную:

$$x = \begin{cases} 1, & \text{если выполнена группа неравенств для } P_1 \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

W — большое положительное число

Моделирование объединения событий. Первый способ

- P_1 :
  $-2y_1 - y_2 \leqslant -4 + W(1-x)$
  $-y_1 + y_2 \leqslant 4 + W(1-x)$
  $4y_1 - 3y_2 \leqslant 8 + W(1-x)$
  $2y_1 + 3y_2 \leqslant 22 + W(1-x)$

Моделирование объединения событий. Первый способ

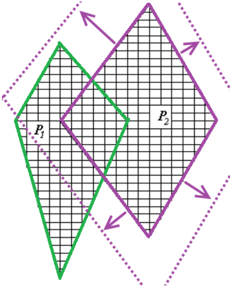
- P_1 :
  $-2y_1 - y_2 \leqslant -4 + W(1-x)$
  $-y_1 + y_2 \leqslant 4 + W(1-x)$
  $4y_1 - 3y_2 \leqslant 8 + W(1-x)$
  $2y_1 + 3y_2 \leqslant 22 + W(1-x)$
- P_2 :
  $-3y_1 - 4y_2 \leqslant -22 + Wx$
  $-3y_1 + 4y_2 \leqslant 10 + Wx$
  $y_1 + y_2 \leqslant 13 + Wx$
  $y_1 - y_2 \leqslant 5 + Wx$

Моделирование объединения событий. Первый способ

- P_1 :
  $-2y_1 - y_2 \leqslant -4 + W(1-x)$
  $-y_1 + y_2 \leqslant 4 + W(1-x)$
  $4y_1 - 3y_2 \leqslant 8 + W(1-x)$
  $2y_1 + 3y_2 \leqslant 22 + W(1-x)$
- P_2 :
  $-3y_1 - 4y_2 \leqslant -22 + Wx$
  $-3y_1 + 4y_2 \leqslant 10 + Wx$
  $y_1 + y_2 \leqslant 13 + Wx$
  $y_1 - y_2 \leqslant 5 + Wx$
- $x \in \{0, 1\}$
  $y_1 \geqslant 0, y_2 \geqslant 0$

Моделирование объединения событий. Первый способ

- P_1 :
  $-2y_1 - y_2 \leqslant -4 + W(1-x)$
  $-y_1 + y_2 \leqslant 4 + W(1-x)$
  $4y_1 - 3y_2 \leqslant 8 + W(1-x)$
  $2y_1 + 3y_2 \leqslant 22 + W(1-x)$
- P_2 :
  $-3y_1 - 4y_2 \leqslant -22 + Wx$
  $-3y_1 + 4y_2 \leqslant 10 + Wx$
  $y_1 + y_2 \leqslant 13 + Wx$
  $y_1 - y_2 \leqslant 5 + Wx$
- $x \in \{0, 1\}$
  $y_1 \geqslant 0, y_2 \geqslant 0$



Моделирование объединения событий. Второй способ

$$\begin{array}{ccc} & y_1 & y_2 \\ & \| & \| \\ P_1 : & y_1^1 & y_2^1 \\ & + & + \\ P_2 : & y_1^2 & y_2^2 \end{array}$$

Булева переменная $x \in \{0, 1\}$ как в первом способе.

Моделирование объединения событий. Второй способ

- P_1 :
  $2y_1^1 + y_2^1 \geqslant 4x$
  $y_1^1 - y_2^1 \geqslant -4x$
  $-4y_1^1 + 3y_2^1 \geqslant -8x$
  $2y_1^1 + 3y_2^1 \leqslant 22x$

Моделирование объединения событий. Второй способ

- P_1 :
  $2y_1^1 + y_2^1 \geqslant 4x$
  $y_1^1 - y_2^1 \geqslant -4x$
  $-4y_1^1 + 3y_2^1 \geqslant -8x$
  $2y_1^1 + 3y_2^1 \leqslant 22x$

- P_2 :
  $3y_1^2 + 4y_2^2 \geqslant 22(1 - x)$
  $-3y_1^2 + 4y_2^2 \leqslant 10(1 - x)$
  $y_1^2 + y_2^2 \leqslant 13(1 - x)$
  $y_1^2 - y_2^2 \leqslant 5(1 - x)$

Моделирование объединения событий. Второй способ

- P_1 :
  $2y_1^1 + y_2^1 \geqslant 4x$
  $y_1^1 - y_2^1 \geqslant -4x$
  $-4y_1^1 + 3y_2^1 \geqslant -8x$
  $2y_1^1 + 3y_2^1 \leqslant 22x$

- P_2 :
  $3y_1^2 + 4y_2^2 \geqslant 22(1 - x)$
  $-3y_1^2 + 4y_2^2 \leqslant 10(1 - x)$
  $y_1^2 + y_2^2 \leqslant 13(1 - x)$
  $y_1^2 - y_2^2 \leqslant 5(1 - x)$

- $y_1^1 + y_1^2 = y_1$
  $y_2^1 + y_2^2 = y_2$
  $y_1^1 \geqslant 0, y_2^1 \geqslant 0$
  $y_1^2 \geqslant 0, y_2^2 \geqslant 0$
  $y_1 \geqslant 0, y_2 \geqslant 0$
  $x \in \{0, 1\}$

Утверждается, что $P_1 \cup P_2 \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда система неравенств разрешима.

Задача составления расписания

n работ

m машин

Задан порядок выполнения работ на машинах:
работа j сначала выполняется на машине с номером $j(1)$,
затем на машине с номером $j(2)$...
В каждый момент времени машина может выполнять не более одной работы, каждая работа выполняется не более, чем на одной машине. Работы не прерываются.
p_{ij} — длительность выполнения работы j на машине i.
Требуется выполнить все работы и минимизировать сумму времен завершения всех работ.

Задача составления расписания

Переменные:

$t_{ij} \geqslant 0$, целые — время начала выполнения работы j на машине i

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{если работа } j \text{ предшествует } k \text{ на машине } i, j < k \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Задача составления расписания

Если работа j предшествует работе k на машине i, то время начала работы k должно наступить не раньше времени завершения работы j:
$t_{ik} \geqslant t_{ij} + p_{ij},$ если $x_{ijk} = 1$
и
$t_{ij} \geqslant t_{ik} + p_{ik},$ если $x_{ijk} = 0$

$t_{ik} \geqslant t_{ij} + p_{ij} - W(1 - x_{ijk})$
$t_{ij} \geqslant t_{ik} + p_{ik} - W x_{ijk},$
где W — большое положительное число

Задача составления расписания

Каждая работа состоит из операций, выполняемых на разных машинах и $(r+1)$-ая операция работы j не может начаться пока не будет завершена предыдущая r-ая операция, значит $t_{j(r+1)j} \geqslant t_{j(r)j} + p_{j(r)j}$

Задача составления расписания

Математическая модель

$$\min \sum_{j=1}^{n} (t_{j(m)j} + p_{j(m)j})$$

$$t_{j(r+1)j} \geqslant t_{j(r)j} + p_{j(r)j}, r = 1, \ldots, (m-1), j = 1, \ldots, n$$

$$t_{ik} \geqslant t_{ij} + p_{ij} - W(1 - x_{ijk}), i = 1, \ldots, m; j, k = 1, \ldots, n$$

$$t_{ij} \geqslant t_{ik} + p_{ik} - W x_{ijk}, i = 1, \ldots, m; j, k = 1, \ldots, n$$

$$t_{ij} \geqslant 0, i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n$$

$$x_{ijk} \in \{0, 1\}, i = 1, \ldots, m; j, k = 1, \ldots, n$$

Линеаризация произведения переменных

Как сделать эквивалентную линейную переформулировку?

$x_i x_j$, где $x_i, x_j \in \{0, 1\}$

Линеаризация произведения переменных

Как сделать эквивалентную линейную переформулировку?

$x_i x_j$, где $x_i, x_j \in \{0, 1\}$

Пусть $y_{ij} = x_i x_j$

Линеаризация произведения переменных

Как сделать эквивалентную линейную переформулировку?

$x_i x_j$, где $x_i, x_j \in \{0,1\}$

Пусть $y_{ij} = x_i x_j$

$$y_{ij} = 1 \Leftrightarrow x_i = 1 \text{ и } x_j = 1$$

Линеаризация произведения переменных

Как сделать эквивалентную линейную переформулировку?

$x_i x_j$, где $x_i, x_j \in \{0, 1\}$

Пусть $y_{ij} = x_i x_j$

$$y_{ij} = 1 \Leftrightarrow x_i = 1 \text{ и } x_j = 1$$

$$y_{ij} = 1 \Rightarrow x_i = 1 \qquad\qquad y_{ij} \leqslant x_i$$

Линеаризация произведения переменных

Как сделать эквивалентную линейную переформулировку?

$x_i x_j$, где $x_i, x_j \in \{0, 1\}$

Пусть $y_{ij} = x_i x_j$

$$y_{ij} = 1 \Leftrightarrow x_i = 1 \text{ и } x_j = 1$$

$$y_{ij} = 1 \Rightarrow x_i = 1 \qquad\qquad y_{ij} \leqslant x_i$$

$$y_{ij} = 1 \Rightarrow x_j = 1 \qquad\qquad y_{ij} \leqslant x_j$$

Линеаризация произведения переменных

Как сделать эквивалентную линейную переформулировку?

$x_i x_j$, где $x_i, x_j \in \{0, 1\}$

Пусть $y_{ij} = x_i x_j$

$$y_{ij} = 1 \Leftrightarrow x_i = 1 \text{ и } x_j = 1$$

$$\begin{aligned} y_{ij} = 1 &\Rightarrow x_i = 1 \\ y_{ij} = 1 &\Rightarrow x_j = 1 \\ x_i = 1 \text{ и } x_j = 1 &\Rightarrow y_{ij} = 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y_{ij} &\leqslant x_i \\ y_{ij} &\leqslant x_j \\ x_i + x_j - y_{ij} &\leqslant 1 \end{aligned}$$

Задача о клике максимального веса

- Дано:
  $G = (V, E)$ — взвешенный неориентированный граф.
- Найти:
  полный подграф (клику) графа G максимального веса.

Задача о клике максимального веса

Переменные:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{если вершина } i \text{ входит в клику} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \qquad \forall i \in V$$

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если ребро } (i,j) \text{ входит в клику} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \qquad \forall i,j \in V : i < j$$

Задача о клике максимального веса

Подграф является кликой, тогда и только тогда, когда он не содержит пару вершин, между которыми нет ребра в исходном графе.
То есть

$$x_i = 1 \implies x_j = 0 \quad \forall j : (i, j) \notin E$$

В виде неравенства:

$$x_j \leqslant 1 - x_i \quad \forall i, \forall j : (i, j) \notin E$$

Задача о клике максимального веса

Для подсчета целевой функции необходимо знать ребра, входящие в клику.
Пусть $i < j$. Ребро $(i, j) \in E$ входит в подграф $\iff$ вершины i и j входят в подграф.

Задача о клике максимального веса

Для подсчета целевой функции необходимо знать ребра, входящие в клику.
Пусть $i < j$. Ребро $(i, j) \in E$ входит в подграф $\iff$ вершины i и j входят в подграф.
Следовательно, $y_{ij} = x_i x_j$.

Задача о клике максимального веса

Для подсчета целевой функции необходимо знать ребра, входящие в клику.
Пусть $i < j$. Ребро $(i, j) \in E$ входит в подграф $\iff$ вершины i и j входят в подграф.
Следовательно, $y_{ij} = x_i x_j$.
В виде неравенств:

$$
\begin{aligned}
y_{ij} &\leqslant x_i \\
y_{ij} &\leqslant x_j \\
x_i + x_j - y_{ij} &\leqslant 1
\end{aligned}
$$

Задача о клике максимального веса

Математическая модель

$$\max \sum_{(i,j)\in E} y_{ij} w_{ij}$$

$$x_j \leqslant 1 - x_i \quad \forall (i,j) \notin E$$

$$y_{ij} \leqslant x_i \quad \forall i,j \in V : i < j$$

$$y_{ij} \leqslant x_j \quad \forall i,j \in V : i < j$$

$$x_i + x_j - y_{ij} \leqslant 1 \quad \forall i,j \in V : i < j$$

$$x_i, y_{ij} \in \{0,1\}, i,j \in V$$

Линеаризация заменой переменных. Задача размещения с распределенными закупками

- Дано:
  I — множество возможных мест для открытия p магазинов
  J — множество потребителей
  u_{ij} — полезность магазина i для потребителя j
  B_j — бюджет потребителя j
  c_{ij} — удельная прибыль от потраченной потребителем j денежной единицы в магазине i
- Найти:
  Размещение p торговых центров, максимизирующее суммарную прибыль при том, что бюджет каждого потребителя делится среди открытых магазинов пропорционально их полезности для данного потребителя.

Задача размещения с распределенными закупками

Переменные:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{если в месте } i \text{ открывается торговый центр} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$y_{ij} \geqslant 0 \text{ — сумма, потраченная клиентом } j \text{ в торговом центре } i$$

Задача размещения с распределенными закупками

Математическая модель

$$\max \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} y_{ij}$$

$$\sum_{i \in I} x_i = p$$

$$y_{ij} = B_j \frac{u_{ij} x_i}{\sum_{k \in I} u_{kj} x_k}, i \in I, j \in J$$

$$x_i \in \{0, 1\}, y_{ij} \geqslant 0, i \in I, j \in J$$

Задача размещения с распределенными закупками

Математическая модель

$$\max \sum_{i\in I} \sum_{j\in J} c_{ij} y_{ij}$$

$$\sum_{i\in I} x_i = p$$

$$y_{ij} = B_j \frac{u_{ij} x_i}{\sum_{k\in I} u_{kj} x_k}, i \in I, j \in J$$

$$x_i \in \{0,1\}, y_{ij} \geqslant 0, i \in I, j \in J$$

Модель нелинейная. Введем дополнительные переменные:

$$z_j = \frac{B_j}{\sum_{k\in I} u_{kj} x_k}$$

Задача размещения с распределенными закупками

Математическая модель

$$\max \sum_{i\in I} \sum_{j\in J} c_{ij} y_{ij}$$

$$\sum_{i\in I} x_i = p$$

$$y_{ij} \leqslant B_j x_i, i \in I, j \in J$$

$$\sum_{i\in I} y_{ij} = B_j, j \in J$$

$$y_{ij} \leqslant u_{ij} z_j, i \in I, j \in J$$

$$u_{ij} z_j \leqslant y_{ij} + B_j(1 - x_i), i \in I, j \in J$$

$$y_{ij} \geqslant 0, z_j \geqslant 0, x_i \in \{0, 1\}, i \in I, j \in J$$

Задача о ценообразовании

- Дано:
  I — множество филиалов
  J — множество потребителей
  b_j — бюджет j-го потребителя
  c_{ij} — транспортные затраты от i-го филиала до j-го потребителя
- Найти:
  стоимость продукции в каждом филиале, чтобы получить максимальный суммарный доход от своих филиалов.

Задача о ценообразовании

Переменные:

$p_i \geqslant 0$ — стоимость продукции в i-м филиале

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } j\text{–ый потребитель выбрал } i\text{–ый филиал} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Задача о ценообразовании

Математическая модель

$$\max \sum_{i \in I} p_i \sum_{j \in J} x_{ij}$$

$$\sum_{i \in I} x_{ij} \leq 1, \quad j \in J$$

$$\sum_{i \in I} (b_j - c_{ij} - p_i) x_{ij} \geqslant 0, \quad j \in J$$

$$\sum_{i \in I} (c_{ij} + p_i) x_{ij} \leqslant c_{kj} + p_k, \quad k \in I, \ j \in J$$

$$p_i \geq 0, x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i \in I, \ j \in J$$

Задача о ценообразовании

Математическая модель

$$\max \sum_{i\in I} p_i \sum_{j\in J} x_{ij}$$

$$\sum_{i\in I} x_{ij} \leq 1, \quad j \in J$$

$$\sum_{i\in I} (b_j - c_{ij} - p_i) x_{ij} \geqslant 0, \quad j \in J$$

$$\sum_{i\in I} (c_{ij} + p_i) x_{ij} \leqslant c_{kj} + p_k, \quad k \in I,\ j \in J$$

$$p_i \geq 0, x_{ij} \in \{0,1\}, \quad i \in I,\ j \in J$$

Модель нелинейная.

Задача о ценообразовании. Линеаризация модели

Пусть $\overline{p}_i$ — максимально возможная цена в i-ом филиале,

$$\overline{p}_i = \max_{j \in J}(b_j - c_{ij})$$

Введем переменные $z_{ij} \geqslant 0$ — доход, который получает производитель от i-го филиала и j-го потребителя в нем, $z_{ij} = p_i x_{ij}$.

Задача о ценообразовании. Линеаризация модели

Математическая модель

$$\max \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} z_{ij}$$

$$\sum_{i\in I}(b_j - c_{ij})x_{ij} - \sum_{i\in I} z_{ij} \geqslant 0, \quad j \in J$$

$$c_{kj} + p_k - \sum_{i\in I} c_{ij}x_{ij} - \sum_{i\in I} z_{ij} \geqslant 0, \quad k \in I,\ j \in J$$

$$(1 - x_{ij})\overline{p}_i - z_{ij} + p_i \geqslant 0, \quad i \in I,\ j \in J$$

$$(1 - x_{ij})\overline{p}_i + z_{ij} - p_i \geqslant 0, \quad i \in I,\ j \in J$$

$$z_{ij} \leqslant \overline{p}_i x_{ij}, \quad i \in I,\ j \in J$$

$$\sum_{i\in I} x_{ij} \leqslant 1, \quad j \in J$$

$$p_i \geqslant 0, x_{ij} \in \{0,1\}, z_{ij} \geqslant 0, \quad i \in I,\ j \in J$$

Симметрия в математических моделях

Требуется

разбить конечное множество объектов I на p групп. Каждый объект может попасть только в одну группу.

Симметрия в математических моделях

Переменные:

$$x_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{если объект } i \text{ попадает в группу } k \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, i \in I, k = 1, \ldots, p.$$

Ограничения:
каждый объект должен попасть только в одну группу:

$$\sum_{k=1}^{p} x_{ik} = 1, \quad \forall i \in I$$

Симметрия в математических моделях

В чем же недостаток?

$I = \{a, b, c, d\}$, $p = 3$

Возможное разбиение $\{a\}$, $\{b, d\}$, $\{c\}$

Но эти решения эквивалентны:

группа 1	*группа 2*	*группа 3*
$\{b, d\}$	$\{a\}$	$\{c\}$
$\{b, d\}$	$\{c\}$	$\{a\}$
$\{a\}$	$\{b, d\}$	$\{c\}$
$\{a\}$	$\{c\}$	$\{b, d\}$
$\{c\}$	$\{b, d\}$	$\{a\}$
$\{c\}$	$\{a\}$	$\{b, d\}$

Каждому разбиению множества объектов соответствует $(p!)$ *эквивалентных решений!*

Нужно избавиться от перестановочной симметрии!!!

Симметрия в математических моделях

Выход: факторизовать множество разбиений

- *Пронумеровать элементы множества* I.

Симметрия в математических моделях

Выход: факторизовать множество разбиений

- *Пронумеровать элементы множества I.*
- *Среди множества эквивалентных решений выбрать одно следующим образом:*

Симметрия в математических моделях

Выход: факторизовать множество разбиений

- *Пронумеровать элементы множества* I.
- *Среди множества эквивалентных решений выбрать одно следующим образом:*
    - *в каждой группе найти объект с наименьшим номером,*

Симметрия в математических моделях

Выход: факторизовать множество разбиений

- *Пронумеровать элементы множества I.*
- *Среди множества эквивалентных решений выбрать одно следующим образом:*
  - *в каждой группе найти объект с наименьшим номером,*
  - *упорядочить группы по возрастанию этих номеров и пронумеровать группы от 1 до p согласно полученному порядку.*

Симметрия в математических моделях

Выход: факторизовать множество разбиений

- *Пронумеровать элементы множества I.*
- *Среди множества эквивалентных решений выбрать одно следующим образом:*
  - *в каждой группе найти объект с наименьшим номером,*
  - *упорядочить группы по возрастанию этих номеров и пронумеровать группы от 1 до p согласно полученному порядку.*

Построенное таким образом решение назовем ***лексикографически минимальным решением*** *среди эквивалентных ему решений.*

Симметрия в математических моделях. Пример

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Симметрия в математических моделях. Пример

$$\{1,2,3,4,5,6\}$$
$$\Downarrow$$
$$\{1,4,6\},\{3\},\{2,5\}$$

Симметрия в математических моделях. Пример

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
$$\Downarrow$$
$$\{1, 4, 6\}, \{3\}, \{2, 5\}$$

Симметрия в математических моделях. Пример

$$\{1,2,3,4,5,6\}$$
$$\Downarrow$$
$$\{1,4,6\},\{3\},\{2,5\}$$
$$\Downarrow$$
$$\mathbf{1}:\{1,4,6\},\mathbf{2}:\{2,5\},\mathbf{3}:\{3\}$$

Симметрия в математических моделях. Назначения в группы

- *Группа 1.*
  Объект 1 должен лежать в группе 1, то есть $x_{11} = 1$.
  Заметим, что $x_{1k} = 0$, при $k > 1$.

Симметрия в математических моделях. Назначения в группы

- *Группа 1.*
  Объект 1 должен лежать в группе 1, то есть $x_{11} = 1$.
  Заметим, что $x_{1k} = 0$, при $k > 1$.
- *Группа 2.*
  Если объект 2 не лежит в группе 1, то он должен лежать в группе 2, то есть
  $$\text{если } x_{21} = 0, \text{ то } x_{22} = 1.$$
  В виде неравенства:
  $$(1 - x_{22}) \leqslant x_{21}.$$

Симметрия в математических моделях. Назначения в группы

- *Группа 2 (продолжение).*
  Если объект 2 лежит в группе 1 и объект 3 не лежит в группе 1, то он должен лежать в группе 2.

Симметрия в математических моделях. Назначения в группы

- *Группа 2 (продолжение).*
  Если объект 2 лежит в группе 1 и объект 3 не лежит в группе 1, то он должен лежать в группе 2.

$$x_{21} = 1,\ x_{31} = 0$$
$$\Downarrow$$
$$x_{32} = 1.$$

Симметрия в математических моделях. Назначения в группы

- *Группа 2 (продолжение).*
  Если объект 2 лежит в группе 1 и объект 3 не лежит в группе 1, то он должен лежать в группе 2.

$$\begin{gathered} x_{21} = 1,\ x_{31} = 0 \\ \Downarrow \\ x_{32} = 1. \end{gathered} \qquad (1 - x_{32}) \leqslant (1 - x_{21}) + x_{31}.$$

Симметрия в математических моделях. Назначения в группы

- *Группа 2 (продолжение).*
  Если объект 2 лежит в группе 1 и объект 3 не лежит в группе 1, то он должен лежать в группе 2.

$$x_{21} = 1,\ x_{31} = 0$$
$$\Downarrow$$
$$x_{32} = 1.$$

$$(1 - x_{32}) \leqslant (1 - x_{21}) + x_{31}.$$

- Если объекты $2, \ldots, (j-1)$ лежат в группе 1 и объект j не лежит в группе 1, тогда объект j должен быть в группе 2.

Симметрия в математических моделях. Назначения в группы

- *Группа 2 (продолжение).*
  Если объект 2 лежит в группе 1 и объект 3 не лежит в группе 1, то он должен лежать в группе 2.

$$x_{21} = 1,\ x_{31} = 0 \quad \Downarrow \quad x_{32} = 1.$$

$$(1 - x_{32}) \leqslant (1 - x_{21}) + x_{31}.$$

- Если объекты $2, \ldots, (j-1)$ лежат в группе 1 и объект j не лежит в группе 1, тогда объект j должен быть в группе 2.

$$x_{i1} = 1,\ i = 2, \ldots, j-1; \quad x_{j1} = 0 \quad \Downarrow \quad x_{j2} = 1.$$

Симметрия в математических моделях. Назначения в группы

- *Группа 2 (продолжение).*
  Если объект 2 лежит в группе 1 и объект 3 не лежит в группе 1, то он должен лежать в группе 2.

$$x_{21} = 1,\ x_{31} = 0 \quad \Downarrow \quad x_{32} = 1.$$

$$(1 - x_{32}) \leqslant (1 - x_{21}) + x_{31}.$$

- Если объекты $2, \ldots, (j-1)$ лежат в группе 1 и объект j не лежит в группе 1, тогда объект j должен быть в группе 2.

$$x_{i1} = 1,\ i = 2, \ldots, j-1; \quad x_{j1} = 0 \quad \Downarrow \quad x_{j2} = 1.$$

$$(1 - x_{j2}) \leqslant \sum_{i=2}^{j-1} (1 - x_{i1}) + x_{j1}.$$

Симметрия в математических моделях. Назначения в группы

- *Группы с 3 по $p-1$.*
  Объект i лежит в группе с номером $l < k \iff \sum_{l=1}^{k-1} x_{il} = 1$.
  Чтобы еще не размещенный объект j открывал новую группу с номером k, объекты $1, \ldots, j-1$ должны лежать в группах с номерами, не превосходящими $k-1$, а объект j — не лежать ни в одной из них.

Симметрия в математических моделях. Назначения в группы

- *Группы с 3 по $p-1$.*
  Объект i лежит в группе с номером $l<k \iff \sum_{l=1}^{k-1} x_{il}=1$.
  Чтобы еще не размещенный объект j открывал новую группу с номером k, объекты $1,\dots,j-1$ должны лежать в группах с номерами, не превосходящими $k-1$, а объект j — не лежать ни в одной из них.

$$\sum_{l=1}^{k-1} x_{il}=1,\ i=2,\dots j-1 \qquad \sum_{l=1}^{k-1} x_{jl}=0$$

$$\Downarrow$$

$$x_{jk}=1.$$

Симметрия в математических моделях. Назначения в группы

- *Группы с 3 по $p - 1$.*
  Объект i лежит в группе с номером $l < k \iff \sum_{l=1}^{k-1} x_{il} = 1$.
  Чтобы еще не размещенный объект j открывал новую группу с номером k, объекты $1, \ldots, j-1$ должны лежать в группах с номерами, не превосходящими $k-1$, а объект j — не лежать ни в одной из них.

$$\sum_{l=1}^{k-1} x_{il} = 1,\ i = 2, \ldots j-1 \qquad \sum_{l=1}^{k-1} x_{jl} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x_{jk} = 1.$$

$$(1 - x_{jk}) \leqslant \sum_{i=2}^{j-1} \left(1 - \sum_{l=1}^{k-1} x_{il}\right) + \sum_{l=1}^{k-1} x_{jl}$$

Симметрия в математических моделях. Назначения в группы

- *Группы с 3 по $p-1$.*
  Объект i лежит в группе с номером $l<k \iff \sum_{l=1}^{k-1} x_{il} = 1$.
  Чтобы еще не размещенный объект j открывал новую группу с номером k, объекты $1,\ldots,j-1$ должны лежать в группах с номерами, не превосходящими $k-1$, а объект j — не лежать ни в одной из них.

$$(1-x_{jk}) \leqslant \sum_{i=2}^{j-1}\left(1-\sum_{l=1}^{k-1} x_{il}\right) + \sum_{l=1}^{k-1} x_{jl}$$

$$\sum_{i=2}^{j-1}\sum_{l=1}^{k-1} x_{il} - \sum_{l=1}^{k} x_{jl} \leqslant j-3,$$

$$k=3,\ldots,(p-1), j=k,\ldots,n.$$

Симметрия в математических моделях. Назначения в группы

- *Группа p.*
  M? ;)

Вопрос

Какие из данных программ являются линейными и моделируют выбор максимального элемента в массиве $\{c_i\}$, $i = 1, \ldots, n$*?*

A:

$$\max \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

$$x_i \in \{0, 1\}, i = 1, \ldots, n$$

B:

$$\max \left(\sum_{i=2}^{n} (c_i - c_{i-1}) x_i + c_1 \right)$$

$$x_i \leqslant x_{i-1}, \quad i = 2, \ldots, n$$

$$x_i \in \{0, 1\}, i = 1, \ldots, n$$

C:

$$\max c_i x_i$$

$$x_i \in \{0, 1\}, i = 1, \ldots, n$$

D:

$$\max c_x$$

$$x \in \{1, \ldots, n\}$$

E:

$$\min x$$

$$x \geqslant c_i, i = 1, \ldots, n$$

Рекомендуемая литература

- Е. В. Алексеева Построение математических моделей целочисленного линейного программирования. Примеры и задачи. Учеб. пособие. НГУ: НОВОСИБИРСК, 2012
- Ю. А. Кочетов Курс лекций по теории принятия решений // `http://www.math.nsc.ru/LBRT/k5/or.html`, 2011
- Х. Пападимитриу, К. Стайглиц Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. М.: Мир, 1985
- F. Plastria Formulating logical implications in combinatorial optimization // European journal of Operational Research. N. 140. 2002

Вопрос

Импликация

«если $x_i = 0$ для всех $i \in I_0$ и $z_i = 1$ для всех $i \in I_1$, то $y = 1$»

моделируется неравенством:

A: $\sum\limits_{i \in I_1} z_i - \sum\limits_{i \in I_0} x_i - y \leqslant |I_0| - 1$

B: $\sum\limits_{i \in I_1} z_i - \sum\limits_{i \in I_0} x_i - y \leqslant |I_0|$

C: $\sum\limits_{i \in I_1} z_i - \sum\limits_{i \in I_0} x_i - y \leqslant |I_1| + 1$

D: $\sum\limits_{i \in I_1} z_i - \sum\limits_{i \in I_0} x_i - y \leqslant |I_1| - 1$

Вопрос

Импликация
«если $x_i = 0$ для всех $i \in I_0$ и $z_i = 1$ для всех $i \in I_1$, то $y = 1$»
моделируется неравенством:

A: $\sum\limits_{i \in I_1} z_i - \sum\limits_{i \in I_0} x_i - y \leqslant |I_0| - 1$

B: $\sum\limits_{i \in I_1} z_i - \sum\limits_{i \in I_0} x_i - y \leqslant |I_0|$

C: $\sum\limits_{i \in I_1} z_i - \sum\limits_{i \in I_0} x_i - y \leqslant |I_1| + 1$

D: $\sum\limits_{i \in I_1} z_i - \sum\limits_{i \in I_0} x_i - y \leqslant |I_1| - 1$

Для «если $x_i = 0$ для всех $i \in I_0$ и $z_i = 1$ для всех $i \in I_1$, то $y = 0$» было:

$$y \leqslant \sum_{i \in I_0} x_i + \sum_{i \in I_1} (1 - z_i)$$

Стало быть, для «если $x_i = 0$ для всех $i \in I_0$ и $z_i = 1$ для всех $i \in I_1$, то $y = 1$» будет:

$$1 - y \leqslant \sum_{i \in I_0} x_i + \sum_{i \in I_1} (1 - z_i)$$

После приведения подобных получим

$$\sum_{i \in I_1} z_i - \sum_{i \in I_0} x_i - y \leqslant |I_1| - 1$$

Вопрос

Системой неравенств

$$y \leqslant u_1$$
$$y \leqslant u_2$$
$$y \geqslant u_1 - W(1 - x)$$
$$y \geqslant u_2 - Wx$$
$$x \in \{0, 1\}$$

моделируется выбор минимального элемента $y = \min(u_1, u_2)$*.*
Какое минимальное значение большой константы W *можно можно использовать при* $u_1 = 3, u_2 = 5$*?*

$$y \leqslant 3$$
$$y \leqslant 5$$
$$y \geqslant 3 - W(1 - x)$$
$$y \geqslant 5 - Wx$$
$$x \in \{0, 1\}$$

$$y \leqslant 3$$
$$y \geqslant 3 - W(1 - x)$$
$$y \geqslant 5 - Wx$$
$$x \in \{0, 1\}$$

$$y \leqslant 3$$
$$y \geqslant 3 - W(1 - x)$$
$$y \geqslant 5 - Wx$$
$$x \in \{0, 1\}$$

$x = 0$:

$$y \leqslant 3$$
$$y \geqslant 3 - W$$
$$y \geqslant 5$$

$x = 1$:

$$y \leqslant 3$$
$$y \geqslant 3$$
$$y \geqslant 5 - W$$

$$
\begin{aligned}
y &\leqslant 3 \\
y &\geqslant 3 - W(1-x) \\
y &\geqslant 5 - Wx \\
x &\in \{0, 1\}
\end{aligned}
$$

$x = 0$:

$$
\begin{aligned}
{\color{red}y} &\leqslant 3 \\
y &\geqslant 3 - W \\
{\color{red}y} &\geqslant 5
\end{aligned}
$$

$x = 1$:

$$
\begin{aligned}
y &\leqslant 3 \\
y &\geqslant 3 \\
y &\geqslant 5 - W
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&y \leqslant 3 \\
&y \geqslant 3 - W(1-x) \\
&y \geqslant 5 - Wx \\
&x \in \{0, 1\}
\end{aligned}
$$

$x = 0$:

$$
\begin{aligned}
&{\color{red}y} \leqslant 3 \\
&y \geqslant 3 - W \\
&{\color{red}y} \geqslant 5
\end{aligned}
$$

$x = 1$:

$$
\begin{aligned}
&y = 3 \\
&y \geqslant 5 - W
\end{aligned}
$$

$x = 1$:

$$y = 3$$
$$y \geqslant 5 - W$$

Ответ: при $W < 2 = |u_1 - u_2|$ система не совместна. Наименьшее возможное значение: $W = 2$.

Вопрос

Какие из данных программ являются линейными и моделируют выбор максимального элемента в массиве $\{c_i\}$, $i = 1, \ldots, n$?

A:

$$\max \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

$$x_i \in \{0, 1\}, i = 1, \ldots, n$$

B:

$$\max \left(\sum_{i=2}^{n} (c_i - c_{i-1}) x_i + c_1 \right)$$

$$x_i \leqslant x_{i-1}, \quad i = 2, \ldots, n$$

$$x_i \in \{0, 1\}, i = 1, \ldots, n$$

C:

$$\max c_i x_i$$

$$x_i \in \{0, 1\}, i = 1, \ldots, n$$

D:

$$\max c_x$$

$$x \in \{1, \ldots, n\}$$

E:

$$\min x$$

$$x \geqslant c_i, i = 1, \ldots, n$$

Вопрос

Какие из данных программ являются линейными и моделируют выбор максимального элемента в массиве $\{c_i\}$, $i = 1, \ldots, n$?

A:

$$\max \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

$$x_i \in \{0,1\}, i = 1, \ldots, n$$

B:

$$\max \left(\sum_{i=2}^{n} (c_i - c_{i-1}) x_i + c_1 \right)$$

$$x_i \leqslant x_{i-1}, \quad i = 2, \ldots, n$$

$$x_i \in \{0,1\}, i = 1, \ldots, n$$

C:

$$\max c_i x_i$$

$$x_i \in \{0,1\}, i = 1, \ldots, n$$

D:

$$\max c_x$$

$$x \in \{1, \ldots, n\}$$

E:

$$\min x$$

$$x \geqslant c_i, i = 1, \ldots, n$$