Лекция 2. Анализ качества математических моделей

Мельников Андрей Андреевич

Новосибирский Государственный Университет
Факультет Информационных Технологий
http://vk.com/fit2013_tdm/

2 марта, 2013 г.

Содержание лекции

1. Линейная релаксация
2. Разрыв целочисленности
3. Число ограничений и переменных в модели
4. Многогранники. Правильные неравенства
5. Целочисленные решения задачи LP
6. Значение больших констант
7. Рекомендуемая литература

$MILP$ в стандартной форме

$$\min_{x,y}(cx + fy) \tag{1}$$

$$Ax + By \geqslant b, \tag{2}$$

$$x \geqslant 0, \tag{3}$$

$$y \geqslant 0, \text{ целые}, \tag{4}$$

- X — множество допустимых решений задачи (1)–(4)
- $z^*(X)$ — оптимальное значение целевой функции (1) на множестве X.

Линейная релаксация

LR (от англ. relaxation — ослабление) для задачи (1)–(4)

$$\min_{x,y}(cx + fy)$$

$$Ax + By \geqslant b,$$

$$x \geqslant 0,$$

$$y \geqslant 0.$$

- X_{LR} — множество допустимых решений линейной релаксации
- $z^*(X_{LR})$ — оптимальное значение целевой функции на множестве X_{LR}.

Свойство линейной релаксации

$$X \subseteq X_{LR}.$$

$$\Downarrow$$

$$\min_{(x,y)\in X} f(x,y) \geqslant \min_{(x,y)\in X_{LR}} f(x,y),$$

$$\max_{(x,y)\in X} f(x,y) \leqslant \max_{(x,y)\in X_{LR}} f(x,y).$$

Разрыв целочисленности

Абсолютный разрыв целочисленности

$$|z^*(X_{LR}) - z^*(X)|$$

Относительный разрыв целочисленности

$$\frac{|z^*(X_{LR}) - z^*(X)|}{\max\{|z^*(X_{LR})|, |z^*(X)|\}} \cdot 100\%.$$

Пример 1

P_1:

$$\max(x_1 + x_2)$$

$$3x_1 + 5x_2 \leqslant 15,$$

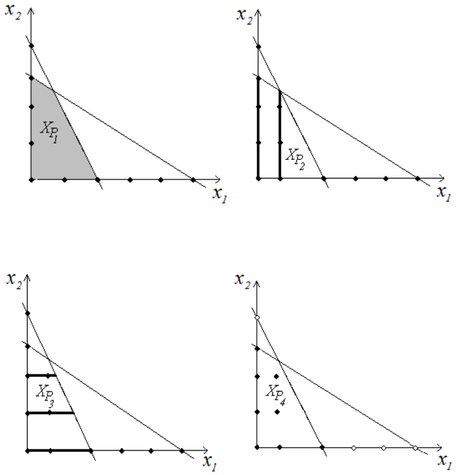
$$5x_1 + 2x_2 \leqslant 10,$$

$$x_1 \geqslant 0, \tag{5}$$

$$x_2 \geqslant 0. \tag{6}$$

- $P_2 : x_1 \geqslant 0,$ *целые* вместо (5)
- $P_3 : x_2 \geqslant 0,$ *целые* вместо (6)
- $P_4 : x_1 \geqslant 0,$ *целые* и $x_2 \geqslant 0,$ *целые* вместо (5), (6)

Графическое представление допустимых областей для P_1, P_2, P_3 и P_4



Оптимальные решения задач P_1, P_2, P_3 и P_4

$$
\begin{array}{lll}
P_1: & z^*(X_{P_1}) = 3.4211 & x^*_{P_1} = (1.0526, 2.3684); \\
P_2: & z^*(X_{P_2}) = 3.4 & x^*_{P_2} = (1, 2.4); \\
P_3: & z^*(X_{P_3}) = 3.2 & x^*_{P_3} = (1.2, 2); \\
P_4: & z^*(X_{P_4}) = 3 & x^*_{P_4} = (1, 2).
\end{array}
$$

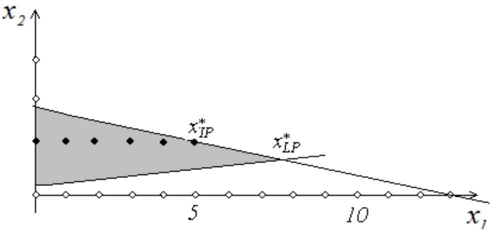
Решение задач P_1, P_2, P_3 с бОльшей допустимой областью дает верхнюю оценку на оптимум задачи P_4 с более жесткими требованиями.

$$x^*_{P_4} = \lfloor x^*_{P_1} \rfloor.$$

Пример 2

$$\max(2x_1 + x_2)$$
$$7x_1 + 48x_2 \leqslant 84,$$
$$-x_1 + 12x_2 \geqslant 3,$$
$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+.$$

Оптимальное решение IP и LR



$$z^* = 11 \quad x^* = (5, 1);$$

$$z^*_{LR} = 13.8864 \quad x^*_{LR} = (6.5455, 0.7955);$$

x^* нельзя получить округлением решения x^*_{LR}.
Абсолютный разрыв: $13.8864 - 11 = 2.8864$
Относительный разрыв: $\frac{2.8864}{13.8864} \cdot 100\ \% = 20.79\ \%$

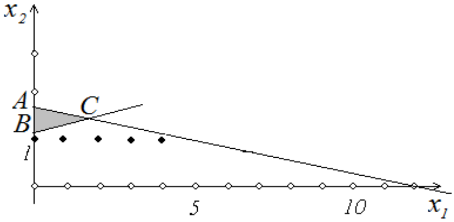
Пример 3

$$\max(2x_1 + x_2)$$
$$7x_1 + 48x_2 \leqslant 84,$$
$$-x_1 + 12x_2 \geqslant 13,$$
$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+.$$

Множество допустимых решений

$X = \varnothing$

X_{LR} — треугольник ABC



Оптимальное решение задачи LR находится в точке C.
Ни одна целочисленная точка не входит в область ABC.

Пример 4

$$x_1 + x_2 \leqslant 10,$$

$$5x_1 + 3x_2 \geqslant 15,$$

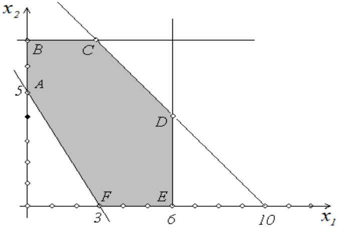
$$x_1 \leqslant 6,$$

$$x_2 \leqslant 7,$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+.$$

Допустимая область

X_{LR} — многоугольник $ABCDEF$



Оптимальное решение задачи LR лежит в одной из угловых точек $ABCDEF$.

Все угловые точки — целочисленные.

Разрыв целочисленности равен нулю.

Задача планирования производства

- Дано:
  T — промежуток времени,
  d_t — заказ на продукцию в месяц t,
  c_t — затраты на запуск производства в месяц t,
  p_t — удельные затраты на производство в месяц t,
  h_t — удельные затраты на хранение продукции в течение месяца t.
- Найти:
  план производства и хранения продукции так, чтобы выполнить заказ с минимальными затратами.

Задача планирования производства

Переменные задачи:

q_{it} — столько продукции производится в месяц i, чтобы выполнить заказ в месяц t, $t \geqslant i$

$$x_t = \begin{cases} 1, & \text{если в месяц } t \text{ было запущено производство,} \\ 0- & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Задача планирования производства

$$\min \sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{t} (p_i + h_i + h_{i+1} + \ldots + h_{t-1}) q_{it} + \sum_{t=1}^{T} c_t x_t, \tag{7}$$

$$\sum_{i=1}^{t} q_{it} = d_t, \ \ t = 1, \ldots, T, \tag{8}$$

$$q_{it} \leqslant d_t x_i, \ \ i = 1, \ldots, T, \ \ t = i, \ldots, T, \tag{9}$$

$$q_{it} \geqslant 0, \ \ x_t \in \{0, 1\}, \ \ t = 1, \ldots, T. \tag{10}$$

Разрыв целочисленности для (7)–(10) равен нулю.

Теорема об оценке близости решений IP и соответствующей LR

Пусть A — целочисленная $(m \times n)$–матрица, каждый минор которой по абсолютной величине не превосходит Δ, и пусть даны векторы b и c. Предположим, что оба максимума

$$\max\{cx | Ax \leqslant b\} \tag{11}$$

и

$$\max\{cx | Ax \leqslant b, x \in \mathbb{Z}\} \tag{12}$$

конечны. Тогда:

1. Для любого оптимального решения y задачи (11) существует оптимальное решение z задачи (12), для которого $\|y - z\|_\infty \leqslant n\Delta$.
2. Для любого оптимального решения z задачи (12) существует оптимальное решение y задачи (11), для которого $\|y - z\|_\infty \leqslant n\Delta$.

Пример. Граница $n\Delta$ не улучшаема

$$A := \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & +1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & +1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & +1 \end{bmatrix}, (\Delta = 1)$$

$$b := \begin{bmatrix} \beta \\ \beta \\ \vdots \\ \beta \end{bmatrix},$$

$$c := (1, \dots, 1)$$

Пример. Граница $n\Delta$ не улучшаема

Следующие векторы являются единственными решениями задач (11) и (12):

$$y := \begin{bmatrix} \beta \\ 2\beta \\ \vdots \\ n\beta \end{bmatrix}, z := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\|y - z\|_\infty = n\beta \quad \forall \beta \in [0, 1)$

Число ограничений и переменных в модели

Имеется парк из трех одинаковых грузовиков и два маршрута, по которым нужно отправить грузовики.
Требуется назначить грузовики на маршруты.

Введение переменных. Два способа

- $x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{грузовик } i \text{ отправляется по маршруту } j \\ 0, \text{в противном случае} \end{cases}$, где $i \in \{1, 2, 3\}$, $j \in \{1, 2\}$.

  Полный перебор возможных значений переменных: 2^6.

Введение переменных. Два способа

- $x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{грузовик } i \text{ отправляется по маршруту } j \\ 0, \text{в противном случае} \end{cases}$, где $i \in \{1, 2, 3\}$, $j \in \{1, 2\}$.

  Полный перебор возможных значений переменных: 2^6.

- $y_i = \begin{cases} 1, \text{грузовик } i \text{ отправляется по 1-му маршруту} \\ 0, \text{грузовик } i \text{ отправляется по 2-му маршруту} \end{cases}$, где $i \in \{1, 2, 3\}$.

  Полный перебор возможных значений переменных: 2^3.

Недостаток: симметрия в решениях

Все грузовики одинаковые, то пара допустимых решений (первый способ)

$$x_{11} = 1, x_{22} = 1, x_{32} = 1 \tag{13}$$

и

$$x_{12} = 1, x_{21} = 1, x_{32} = 1, \tag{14}$$

и пара допустимых решений (второй способ)

$$y_1 = 1, y_2 = 0, y_3 = 0 \tag{15}$$

и

$$y_1 = 0, y_2 = 1, y_3 = 0 \tag{16}$$

по сути, представляют одно и то же назначение грузовиков на маршруты.

Введение переменных. Третий способ

- n_j — количество грузовиков, отправленных по маршруту j. Решение $n_1 = 1, n_2 = 2$ и решения (13), (14), (15) и (16), по сути — одно и то же назначение грузовиков на маршруты. В модели в

  три раза меньше переменных.

Многогранники

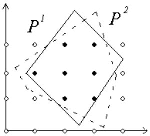
Определение

*Множество точек, удовлетворяющих конечному числу линейных неравенств, называют **многогранником**.*

Пусть $X = \{x \in \mathbb{Z}^n | Ax \leqslant b\}$.

Определение

*Многогранник P называют **представлением** X, если $P \cap \mathbb{Z}^n = X$.*



Представление P_1 лучше представления P_2, если $P_1 \subset P_2$.

Вопрос

P_1 и P_2 — представления множества X. При этом P_1 лучше P_2. Правда ли, что для оптимальных значений целевой функции задачи минимизации на множествах P_1, P_2 и X всегда выполняются следующие соотношения:

***A**:*

$$z^*(X) < z^*(P_2)$$

***B**:*

$$z^*(P_2) \leqslant z^*(P_1)$$

***C**:*

$$z^*(X) = z^*(P_1)$$

Многогранники

Определение

Выпуклой оболочкой множества X называется наименьшее по включению выпуклое множество $conv(X)$, содержащее X.

Определение

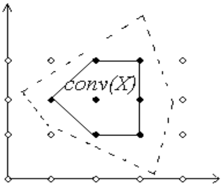
Выпуклой комбинацией точек $x_1, \ldots, x_n$ называется сумма вида $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, где $\lambda_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$ и $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$

Утверждение

$conv(X) = \{x | x$ — выпуклая комбинация некоторых $x_1, \ldots, x_n \in X\}$

Многогранники

Выпуклая оболочка множества допустимых решений задачи $MILP$ является многогранником и является его лучшим представлением, разрыв целочисленности равен нулю.



Многогранники

- Нахождение $conv(X)$ является не менее сложной задачей, чем решение исходной задачи $MILP$;

Многогранники

- Нахождение $conv(X)$ является не менее сложной задачей, чем решение исходной задачи $MILP$;
- Для многих задач $MILP$ описание $conv(X)$ требует экспоненциального числа переменных и линейных неравенств, а значит для решения полученной таким образом задачи LP потребуется много времени.

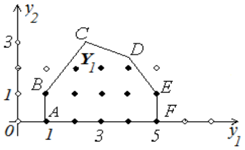
Многогранники

- Нахождение $conv(X)$ является не менее сложной задачей, чем решение исходной задачи $MILP$;
- Для многих задач $MILP$ описание $conv(X)$ требует экспоненциального числа переменных и линейных неравенств, а значит для решения полученной таким образом задачи LP потребуется много времени.
- С другой стороны, добавление ограничений улучшает оценку LP. Если делать это аккуратно, можно заметно ускорить время работы алгоритма.

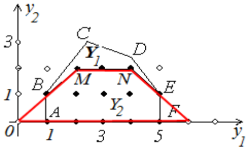
Построение правильных неравенств

Определение

*Неравенство называется **правильным**, если его добавление не меняет множество допустимых решений.*



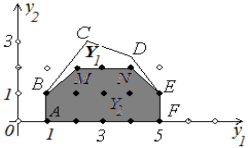
Y_1 :
$1 \leqslant y_1 \leqslant 5,$
$y_1 + 0.8y_2 \leqslant 5.8,$
$y_1 - 0.8y_2 \geqslant 0.2,$
$y_1 + 8y_2 \leqslant 26,$
$y_1, y_2 \in \mathbb{Z}^+$



Y_2 :
$y_1 + y_2 \leqslant 6,$
$y_1 - y_2 \geqslant 0,$
$y_2 \leqslant 2,$
$y_1 \geqslant 0, \; y_2 \geqslant 0.$

Построение правильных неравенств

$Y_1 = Y_1 \cap Y_2 \implies$ имеем правильные неравенства:



$$
\begin{aligned}
&1 \leqslant y_1 \leqslant 5,\\
&y_1 + 0.8y_2 \leqslant 5.8,\\
&y_1 - 0.8y_2 \geqslant 0.2,\\
&y_1 + 8y_2 \leqslant 26,\\
&y_1 + y_2 \leqslant 6,\\
&y_1 - y_2 \geqslant 0,\\
&y_2 \leqslant 2,\\
&y_1, y_2 \in \mathbb{Z}^+
\end{aligned}
$$

Кроме того $(Y_1 \cup Y_2)_{LR} = conv(Y_1) \implies$ разрыв целочисленности устранен.

Построение правильных неравенств

Пусть допустимое множество задается группой линейных неравенств вида

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leqslant b$$

$$x_j \in \{0,1\}, j = 1, \ldots, n.$$

Построение правильных неравенств

Пусть допустимое множество задается группой линейных неравенств вида

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leqslant b$$

$$x_j \in \{0,1\}, j = 1,\ldots,n.$$

Без ограничения общности можно считать, что $a_j \geqslant 0 \; \forall j = 1,\ldots,n$.

Построение правильных неравенств

Пусть допустимое множество задается группой линейных неравенств вида

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leqslant b$$

$$x_j \in \{0,1\}, j = 1, \ldots, n.$$

Без ограничения общности можно считать, что $a_j \geqslant 0 \; \forall j = 1, \ldots, n$. Если $\sum_{j \in N} a_j > b$, для некоторого $N \subseteq \{1, \ldots, n\}$, то в модель можно ввести дополнительное неравенство

$$\sum_{j \in N} x_j \leqslant |N| - 1 \tag{17}$$

Пример

$$
\begin{aligned}
-3x_2 - 2x_3 &\leqslant -2,\\
-4x_1 - 3x_2 - 3x_3 &\leqslant -6,\\
2x_1 - 2x_2 + 6x_3 &\leqslant 5,\\
x_i \in \{0, 1\}, i &= 1, 2, 3.
\end{aligned}
$$

Пример

$$-3x_2 - 2x_3 \leqslant -2,$$

$$-4x_1 - 3x_2 - 3x_3 \leqslant -6,$$

$$2x_1 - 2x_2 + 6x_3 \leqslant 5,$$

$$x_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, 3.$$

Для $a_{ij} < 0$ введем новую переменную $x'_j = 1 - x_j$ и подставим ее в систему неравенств.

Пример

После подстановки переменных, получим:

$$3x_2' + 2x_3' \leqslant 3, \tag{18}$$

$$4x_1' + 3x_2' + 3x_3' \leqslant 4, \tag{19}$$

$$2x_1 + 2x_2' + 6x_3 \leqslant 7, \tag{20}$$

$$x_j' = 1 - x_j, j = 1, 2, 3. \tag{21}$$

$$x_j, x_j' \in \{0, 1\}, j = 1, 2, 3. \tag{22}$$

Пример

Из (17):

$$\begin{array}{c} 3x_2' + 2x_3' \leqslant 3 \\ \Downarrow \\ x_2' + x_3' \leqslant 1 \\ \Downarrow \\ x_2 + x_3 \geqslant 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 2x_1 + 2x_2' + 6x_3 \leqslant 7 \\ \Downarrow \\ x_2' + x_3 \leqslant 1 \\ \Downarrow \\ x_3 \leqslant x_2. \end{array}$$

$x_2 = 1$ или $x_2' = 0$, и тогда ограничения (19) и (20) превращаются в

$$4x_1' + 3x_3' \leqslant 4 \text{ и } 2x_1 + 6x_3 \leqslant 7.$$

Учитывая (17):

$$x_1' + x_3' \leqslant 1 \text{ и } x_1 + x_3 \leqslant 1$$

Можно исключить x_1 или x_3.

Задача планирования производства. I'm back

- Дано:
  T — промежуток времени,
  d_t — заказ на продукцию в месяц t,
  c_t — затраты на запуск производства в месяц t,
  p_t — удельные затраты на производство в месяц t,
  h_t — удельные затраты на хранение продукции в течение месяца t.
- Найти:
  план производства и хранения продукции так, чтобы выполнить заказ с минимальными затратами.

Задача планирования производства. I'm back

Переменные задачи:

y_t — количество продукции, произведенной в месяц t;

s_t — количество продукции, оставленной на складе к концу месяца t;

$$x_t = \begin{cases} 1, & \text{если в месяц } t \text{ было запущено производство,} \\ 0- & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Задача планирования производства. I'm back

$$\min \sum_{t=1}^{T} (c_t x_t + p_t y_t + h_t s_t) \tag{23}$$

$$y_1 = d_1 + s_1, \tag{24}$$

$$s_{t-1} + y_t = d_t + s_t, \;\; t = 2, \dots, T, \tag{25}$$

$$y_t \leqslant \sum_{k=1}^{T} d_k x_t, \;\; t = 1, \dots, T, \tag{26}$$

$$s_T = 0, \tag{27}$$

$$y_t \geqslant 0, \;\; s_t \geqslant 0, \;\; \text{целые}, \;\; x_t \in \{0, 1\}, \;\; t = 1, \dots, T. \tag{28}$$

Задача планирования производства. I'm back

$$\min \sum_{t=1}^{T} (c_t x_t + p_t y_t + h_t s_t) \tag{23}$$

$$y_1 = d_1 + s_1, \tag{24}$$

$$s_{t-1} + y_t = d_t + s_t, \;\; t = 2, \ldots, T, \tag{25}$$

$$y_t \leqslant \sum_{k=1}^{T} d_k x_t, \;\; t = 1, \ldots, T, \tag{26}$$

$$s_T = 0, \tag{27}$$

$$y_t \geqslant 0, \;\; s_t \geqslant 0, \;\; \text{целые}, \;\; x_t \in \{0, 1\}, \;\; t = 1, \ldots, T. \tag{28}$$

Правильные неравенства для задачи планирования производства

Утверждение

Для любых l и C неравенства

$$\sum_{i\in C} y_i \leqslant \sum_{i\in C}\left(\sum_{t=i}^{l} d_t\right) x_i + s_l,\ 1\leqslant l\leqslant T,\ C\subseteq\{1,\dots,l\} \tag{29}$$

являются правильными для задачи (23)–(28).

Доказательство.

Проверим, что добавление неравенств (29) в модель не приводит к потере допустимых решений задачи.

Возьмем допустимое решение (y, s, x) задачи (23) – (28) и покажем, что неравенства (29) выполняются.

Правильные неравенства для задачи планирования производства

$$\sum_{i \in C} y_i \leqslant \sum_{i \in C} \left(\sum_{t=i}^{l} d_t \right) x_i + s_l, \ 1 \leqslant l \leqslant T, \ C \subseteq \{1, \ldots, l\}$$

Рассмотрим два случая.

- 1. $x_i = 0$ для любого $i \in C$.
  Тогда $y_i = 0$ для любого $i \in C$ и (29) превращается в $s_l \geqslant 0$.

Правильные неравенства для задачи планирования производства

$$\sum_{i\in C} y_i \leqslant \sum_{i\in C}\left(\sum_{t=i}^{l} d_t\right) x_i + s_l,\ 1\leqslant l\leqslant T,\ C\subseteq\{1,\ldots,l\}$$

Рассмотрим два случая.

- 1. $x_i = 0$ для любого $i\in C$.
  Тогда $y_i = 0$ для любого $i\in C$ и (29) превращается в $s_l \geqslant 0$.
- 2. $x_i = 1$ для некоторого $i\in C$.
  Пусть $k = \min\{i\in C | x_i = 1\}$. Тогда $y_i = 0$ для любого $i < k$ и

$$\sum_{i\in C} y_i \leqslant \sum_{t=k}^{l} y_t = \sum_{t=k}^{l} d_t + s_l - s_{k-1} \leqslant$$

$$\sum_{t=k}^{l} d_t + s_l \leqslant \sum_{i\in C}\left(\sum_{t=i}^{l} d_t\right) x_i + s_l$$

Правильные неравенства для задачи планирования производства

Теорема [3]

Выпуклая оболочка множества (24)–(28) задается следующей системой ограничений:

$$y_1 = d_1 + s_1, \tag{30}$$

$$s_{t-1} + y_t = d_t + s_t, \quad t = 2, \dots, T, \tag{31}$$

$$s_T = 0, \tag{32}$$

$$x_t \leqslant 1, \quad t = 1, \dots, T, \tag{33}$$

$$\sum_{i \in C} y_i \leqslant \sum_{i \in C} \left(\sum_{t=i}^{l} d_t \right) x_i + s_l \text{ для любого } l, \text{ и } C \neq \varnothing, \tag{34}$$

$$y_t \geqslant 0, s_t \geqslant 0, x_t \geqslant 0, \quad t = 1, \dots, T. \tag{35}$$

Унимодулярные и полностью унимодулярные матрицы

Определение

Многогранник будем называть ***целочисленным****, если все его вершины имеют целые координаты.*

Пусть многогранник P задается системой линейных ограничений $P = \{x | Ax = b, x \geqslant 0\}$.

Унимодулярные и полностью унимодулярные матрицы

Определение

Многогранник будем называть *целочисленным*, *если все его вершины имеют целые координаты.*

Пусть многогранник P задается системой линейных ограничений $P = \{x | Ax = b, x \geqslant 0\}$. Все его вершины суть базисные решения системы $Ax = b$.

Унимодулярные и полностью унимодулярные матрицы

Определение

*Многогранник будем называть **целочисленным**, если все его вершины имеют целые координаты.*

Пусть многогранник P задается системой линейных ограничений $P = \{x | Ax = b, x \geqslant 0\}$. Все его вершины суть базисные решения системы $Ax = b$. Как они получаются?

$$A = (B|N) \quad Bx_B + Nx_N = b \quad x = (B^{-1}b|0)$$

Унимодулярные и полностью унимодулярные матрицы

Определение

Многогранник будем называть целочисленным, если все его вершины имеют целые координаты.

Пусть многогранник P задается системой линейных ограничений $P = \{x | Ax = b, x \geqslant 0\}$. Все его вершины суть базисные решения системы $Ax = b$. Как они получаются?

$$A = (B|N) \quad Bx_B + Nx_N = b \quad x = (B^{-1}b|0)$$

То есть, P целочисленный $\iff$ все базисные решения целочисленные. Пусть A и b имеют целые координаты. Поскольку

$$B^{-1}b = \frac{B^*b}{|B|},$$

то все зависит от $|B|$.

Унимодулярные и полностью унимодулярные матрицы

Определение

Целочисленная матрица A называется унимодулярной, если определитель любого ее невырожденного максимального минора равен ± 1.

Унимодулярные и полностью унимодулярные матрицы

Определение

Целочисленная матрица A называется унимодулярной, если определитель любого ее невырожденного максимального минора равен ± 1.

В силу сказанного, получаем

Утверждение

Если матрица A унимодулярна, то многогранник $P = \{x | Ax = b, x \geqslant 0\}$ при всех целочисленных b является целочисленным.

Унимодулярные и полностью унимодулярные матрицы

Определение

Целочисленная матрица A называется унимодулярной, если определитель любого ее невырожденного максимального минора равен ± 1.

В силу сказанного, получаем

Утверждение

Если матрица A унимодулярна, то многогранник $P = \{x | Ax = b, x \geqslant 0\}$ при всех целочисленных b является целочисленным.

Следствие

Задача оптимизации

$$cx \to extr_{x \in \mathbb{Z}^+ \cap P}$$

имеет нулевой разрыв целочисленности.

Унимодулярные и полностью унимодулярные матрицы

Теперь пусть многогранник P задается системой линейных ограничений $P = \{x|Ax \leqslant b, x \geqslant 0\}$.

Унимодулярные и полностью унимодулярные матрицы

Теперь пусть многогранник P задается системой линейных ограничений $P = \{x|Ax \leqslant b, x \geqslant 0\}$. После приведения ограничений к канонической форме получим систему уравнений вида $(A|E)x = b$. Следовательно, для того, чтобы многогранник P был целочисленным для всех целочисленных правых частей b, достаточно потребовать унимодулярности матрицы $(A|E)$.

Унимодулярные и полностью унимодулярные матрицы

Теперь пусть многогранник P задается системой линейных ограничений $P = \{x|Ax \leqslant b, x \geqslant 0\}$. После приведения ограничений к канонической форме получим систему уравнений вида $(A|E)x = b$. Следовательно, для того, чтобы многогранник P был целочисленным для всех целочисленных правых частей b, достаточно потребовать унимодулярности матрицы $(A|E)$. Любой ее максимальный минор содержит часть столбцов матрицы A и часть столбцов матрицы E и равен 0 или ± 1.

Унимодулярные и полностью унимодулярные матрицы

Теперь пусть многогранник P задается системой линейных ограничений $P = \{x | Ax \leqslant b, x \geqslant 0\}$. После приведения ограничений к канонической форме получим систему уравнений вида $(A|E)x = b$. Следовательно, для того, чтобы многогранник P был целочисленным для всех целочисленных правых частей b, достаточно потребовать унимодулярности матрицы $(A|E)$. Любой ее максимальный минор содержит часть столбцов матрицы A и часть столбцов матрицы E и равен 0 или ± 1. Раскладывая его по столбцам матрицы E, приходим к следующему определению:

Определение

*Целочисленная матрица A называется **полностью унимодулярной**, если определитель любой ее квадратной подматрицы равен 0 или ± 1.*

Утверждение

Если матрица A полностью унимодулярна, то многогранник $P = \{x|Ax \leqslant b, x \geqslant 0\}$ при всех целочисленных b является целочисленным.

Утверждение

Если матрица A полностью унимодулярна, то многогранник $P = \{x|Ax \leqslant b, x \geqslant 0\}$ при всех целочисленных b является целочисленным.

Следствие

Задача оптимизации

$$cx \to extr_{x \in \mathbb{Z}^{+} \cap P}$$

имеет нулевой разрыв целочисленности.

Является ли матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

унимодулярной? полностью унимодулярной?

Унимодулярные и полностью унимодулярные матрицы

Теорема [3]

Следующие утверждения эквиваленты:

Унимодулярные и полностью унимодулярные матрицы

Теорема [3]

Следующие утверждения эквиваленты:

- *Матрица A является полностью унимодулярной (ПУ).*

Унимодулярные и полностью унимодулярные матрицы

Теорема [3]

Следующие утверждения эквиваленты:

- *Матрица A является полностью унимодулярной (ПУ).*
- *Матрица A^T, является ПУ.*

Унимодулярные и полностью унимодулярные матрицы

Теорема [3]

Следующие утверждения эквиваленты:

- *Матрица* A *является полностью унимодулярной (ПУ).*
- *Матрица* A^T, *является ПУ.*
- *Матрица* $(A|E)$ *является ПУ.*

Унимодулярные и полностью унимодулярные матрицы

Теорема [3]

Следующие утверждения эквиваленты:

- *Матрица A является полностью унимодулярной (ПУ).*
- *Матрица A^T, является ПУ.*
- *Матрица $(A|E)$ является ПУ.*
- *Матрица, полученная удалением строки (столбца) из матрицы A, является ПУ.*

Унимодулярные и полностью унимодулярные матрицы

Теорема [3]

Следующие утверждения эквиваленты:

- *Матрица A является полностью унимодулярной (ПУ).*
- *Матрица A^T, является ПУ.*
- *Матрица $(A|E)$ является ПУ.*
- *Матрица, полученная удалением строки (столбца) из матрицы A, является ПУ.*
- *Матрица, полученная умножением строки (столбца) матрицы A на -1, является ПУ.*

Унимодулярные и полностью унимодулярные матрицы

Теорема [3]

Следующие утверждения эквиваленты:

- *Матрица A является полностью унимодулярной (ПУ).*
- *Матрица A^T, является ПУ.*
- *Матрица $(A|E)$ является ПУ.*
- *Матрица, полученная удалением строки (столбца) из матрицы A, является ПУ.*
- *Матрица, полученная умножением строки (столбца) матрицы A на -1, является ПУ.*
- *Матрица, полученная перестановкой двух строк (столбцов) матрицы A, является ПУ.*

Унимодулярные и полностью унимодулярные матрицы

Теорема [3]

(продолжение)

- *Матрица, полученная дублированием строк (столбцов) матрицы A, является ПУ.*

Унимодулярные и полностью унимодулярные матрицы

Теорема [3]

(продолжение)

- *Матрица, полученная дублированием строк (столбцов) матрицы A, является ПУ.*
- *Матрица, полученная симплекс–алгоритмом после смены базиса, является ПУ.*

Унимодулярные и полностью унимодулярные матрицы

Утверждение [2]

Матрица A, составленная из 0, 1 или -1, является полностью унимодулярной, если в каждом столбце не более двух ненулевых элементов, и строки матрицы A можно так разбить на два подмножества I_1 и I_2, что для каждого столбца верно следующее:

- *Если два ненулевых элемента имеют одинаковые знаки, то соответствующие им строки лежат в разных множествах.*

Унимодулярные и полностью унимодулярные матрицы

Утверждение [2]

Матрица A, составленная из 0, 1 или -1, является полностью унимодулярной, если в каждом столбце не более двух ненулевых элементов, и строки матрицы A можно так разбить на два подмножества I_1 и I_2, что для каждого столбца верно следующее:

- *Если два ненулевых элемента имеют одинаковые знаки, то соответствующие им строки лежат в разных множествах.*
- *Если два ненулевых элемента имеют разные знаки, то соответствующие им строки лежат в одном и том же множестве.*

Вопрос

Пусть заданы целочисленные A и b и матрица A не унимодулярна. Значит ли это, что у $P = \{x | Ax = b, x \geqslant 0\}$ есть нецелочисленные вершины?

Транспортная задача.

- **Дано**:
  m пунктов производства и n пунктов потребления некоторой однородной продукции;
  a_i — объем производства в пункте i, $i = 1, \ldots, m$;
  b_j — объем потребления в пункте j, $j = 1, \ldots, n$;
  $c = (c_{ij})$ — матрица удельных транспортных расходов на перевозку из пункта i в пункт j.
  Производство и потребление сбалансированы, т. е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

- **Найти**:
  план перевозок, который не нарушает ограничений на мощности производств и удовлетворяет все потребности с минимальными суммарными затратами.

Транспортная задача.

Переменные:
$x_{ij} \geqslant 0$ — объем перевозок из пункта производства i в пункт потребления j

Транспортная задача.

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = 1, \ldots, m,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = 1, \ldots, n,$$

$$x_{ij} \geqslant 0, i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n.$$

Значение больших констант

Вспомним задачу размещения предприятий с ограничениями на мощности производства (л. 1, с. 18).

Значение больших констант

Вспомним задачу размещения предприятий с ограничениями на мощности производства (л. 1, с. 18).
Пусть имеется одно предприятие мощности u стоимостью f и один потребитель с потребностью $b < u$.

Значение больших констант

Вспомним задачу размещения предприятий с ограничениями на мощности производства (л. 1, с. 18).
Пусть имеется одно предприятие мощности u стоимостью f и один потребитель с потребностью $b < u$.
Переменные:

Значение больших констант

Вспомним задачу размещения предприятий с ограничениями на мощности производства (л. 1, с. 18).

Пусть имеется одно предприятие мощности u стоимостью f и один потребитель с потребностью $b < u$.

Переменные:

$$x = \begin{cases} 1, \text{если предприятие открыто} \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$$

Значение больших констант

Вспомним задачу размещения предприятий с ограничениями на мощности производства (л. 1, с. 18).

Пусть имеется одно предприятие мощности u стоимостью f и один потребитель с потребностью $b < u$.

Переменные:

$$x = \begin{cases} 1, \text{если предприятие открыто} \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$$

$y \geqslant 0$ — количество продукции, поставляемое потребителю из предприятия.

Значение больших констант

Вспомним задачу размещения предприятий с ограничениями на мощности производства (л. 1, с. 18).
Пусть имеется одно предприятие мощности u стоимостью f и один потребитель с потребностью $b < u$.
Переменные:

$$x = \begin{cases} 1, \text{если предприятие открыто} \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$$

$y \geqslant 0$ — количество продукции, поставляемое потребителю из предприятия.
Требуется минимизировать суммарные затраты.

Значение больших констант

Вспомним задачу размещения предприятий с ограничениями на мощности производства (л. 1, с. 18).
Пусть имеется одно предприятие мощности u стоимостью f и один потребитель с потребностью $b < u$.
Переменные:

$$x = \begin{cases} 1, \text{если предприятие открыто} \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$$

$y \geqslant 0$ — количество продукции, поставляемое потребителю из предприятия.
Требуется минимизировать суммарные затраты.

Рассмотрим одно из ограничений:

$y \leqslant Wx$, *где* $x \in \{0, 1\}$, W *— большая константа.*

Значение больших констант

Вспомним задачу размещения предприятий с ограничениями на мощности производства (л. 1, с. 18).
Пусть имеется одно предприятие мощности u стоимостью f и один потребитель с потребностью $b < u$.
Переменные:

$$x = \begin{cases} 1, \text{если предприятие открыто} \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$$

$y \geqslant 0$ — количество продукции, поставляемое потребителю из предприятия.
Требуется минимизировать суммарные затраты.

Рассмотрим одно из ограничений:

$y \leqslant Wx$, где $x \in \{0, 1\}$, W — большая константа.
Очевидно, в качестве W можно взять любое число, не меньшее b.
Важно ли значение W?

Значение больших констант

Значение больших констант

Пусть кто–нибудь решил взять $W > b$.

Значение больших констант

Пусть кто–нибудь решил взять $W > b$.

В оптимальном решении $y = b$, поэтому, в силу ограничения $y \leqslant Wx$, линейная релаксация даст

$$x = \frac{b}{W} < 1.$$

Значение больших констант

Пусть кто–нибудь решил взять $W > b$.

В оптимальном решении $y = b$, поэтому, в силу ограничения $y \leqslant Wx$, линейная релаксация даст

$$x = \frac{b}{W} < 1.$$

Затраты на открытие предприятий будут оценены как $f\frac{b}{W}$. Появляется разрыв целочисленности.

Значение больших констант

Пусть кто–нибудь решил взять $W > b$.

В оптимальном решении $y = b$, поэтому, в силу ограничения $y \leqslant Wx$, линейная релаксация даст

$$x = \frac{b}{W} < 1.$$

Затраты на открытие предприятий будут оценены как $f\frac{b}{W}$. Появляется разрыв целочисленности.

Большие значения W приводят к росту разрыва целочисленности

Значение больших констант

Пусть кто–нибудь решил взять
$W > b$.

В оптимальном решении $y = b$, поэтому, в силу ограничения $y \leqslant Wx$, линейная релаксация даст

$$x = \frac{b}{W} < 1.$$

Затраты на открытие предприятий будут оценены как $f\frac{b}{W}$. Появляется разрыв целочисленности.

Большие значения W приводят к росту разрыва целочисленности

$\Longrightarrow$ ухудшению оценок линейного программирования

Значение больших констант

Пусть кто–нибудь решил взять $W > b$.

В оптимальном решении $y = b$, поэтому, в силу ограничения $y \leqslant Wx$, линейная релаксация даст

$$x = \frac{b}{W} < 1.$$

Затраты на открытие предприятий будут оценены как $f\frac{b}{W}$. Появляется разрыв целочисленности.

Большие значения W приводят к росту разрыва целочисленности

$\Longrightarrow$ ухудшению оценок линейного программирования

$\Longrightarrow$ снижению скорости работы алгоритмов решения MIP

Пример. Уточнение границ в задаче планирования производства

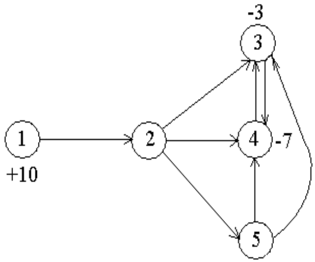
В ограничениях (26) для каждого промежутка времени t вместо грубой оценки

$$\sum_{k=1}^{T} d_k$$

лучше использовать уточненную оценку

$$\sum_{\color{red}{k=t}}^{T} d_k.$$

Пример. Задача о потоке с фиксированными затратами



- Дано
  c_{ij} — удельные стоимости перевозки продукции вдоль дуги (i, j),
  h_{ij} — плата за использование дуги (i, j),
  b_i — спрос или предложение в вершине i.
- Требуется доставить 3 и 7 единиц продукции в 3-ю и 4-ю вершины соответственно с минимальными затратами.

Пример. Задача о потоке с фиксированными затратами

Переменные:

$x_{ij} \geqslant 0$ — величина потока, пропускаемого по дуге (i, j)

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если по дуге } (i,j) \text{ выполняются перевозки,} \\ 0- & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

B — некоторое положительное большое число.

Пример. Задача о потоке с фиксированными затратами

Математическая модель:

$$\min \sum_{(i,j)\in A} (c_{ij}x_{ij} + h_{ij}y_{ij}),$$

при ограничениях:

$$x_{ij} \leqslant B y_{ij}, (i,j) \in A,$$

$$\sum_{j\in V} x_{ji} - \sum_{j\in V} x_{ij} = b_i, i \in V,$$

$$x_{ij} \geqslant 0, (i,j) \in A,$$

$$y_{ij} \in \{0,1\}, (i,j) \in A.$$

Пример. Задача о потоке с фиксированными затратами

Вместо

$$x_{ij} \leqslant By_{ij}, (i,j) \in A,$$

Лучше

$$x_{23} \leqslant 10y_{23},$$

$$x_{24} \leqslant 10y_{24},$$

$$x_{25} \leqslant 10y_{25},$$

$$x_{34} \leqslant 7y_{34},$$

$$x_{43} \leqslant 3y_{43},$$

$$x_{54} \leqslant 10y_{54},$$

$$x_{53} \leqslant 10y_{53}.$$

Рекомендуемая литература

- Е. В. Алексеева Построение математических моделей целочисленного линейного программирования. Примеры и задачи. Учеб. пособие. НГУ: НОВОСИБИРСК, 2012
- Пападимитриу Х., Стайглиц К. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. М.: Мир, 1985
- Nemhauser G. L., Wolsey L. A. Integer and combinatorial optimization. John Wiley & Sons, Inc., 1999