МАТРОИДЫ

Матроидом будем называть произвольную пару $M = [E, \mathfrak{I}]$, где E — конечное множество, а $\mathfrak{I}$ — непустое семейство подмножеств множества E, удовлетворяющее условиям:

(M1) из $(A \in \mathfrak{I}, B \subset A)$ следует, что $B \in \mathfrak{I}$;

(M2) $\forall\, A, B \in \mathfrak{I}$, таких, что $|A| < |B|$, всегда найдется $e \in B \setminus A : A \cup \{e\} \in \mathfrak{I}$.

Множества семейства $\mathfrak{I}$ назовем *независимыми множествами*, а все другие подмножества E — *зависимыми множествами* матроида M.

Из (M1) и непустоты $\mathfrak{I}$ следует, что $\varnothing \in \mathfrak{I}$ в любом матроиде.

База матроида — это любое максимальное по включению независимое множество. Из аксиомы (M2) следует, что все базы матроида имеют одну и ту же мощность.

Цикл матроида — это любое минимальное по включению зависимое множество.

Примеры.

1. Матричный матроид. Элементами множества E являются столбцы некоторой матрицы A. Подмножество столбцов считается независимым, если оно линейно независимо (в обычном смысле).

2. Графический матроид. Элементами множества E являются ребра некоторого графа G, и подмножество множества ребер G считается независимым, если оно не содержит цикла графа G.

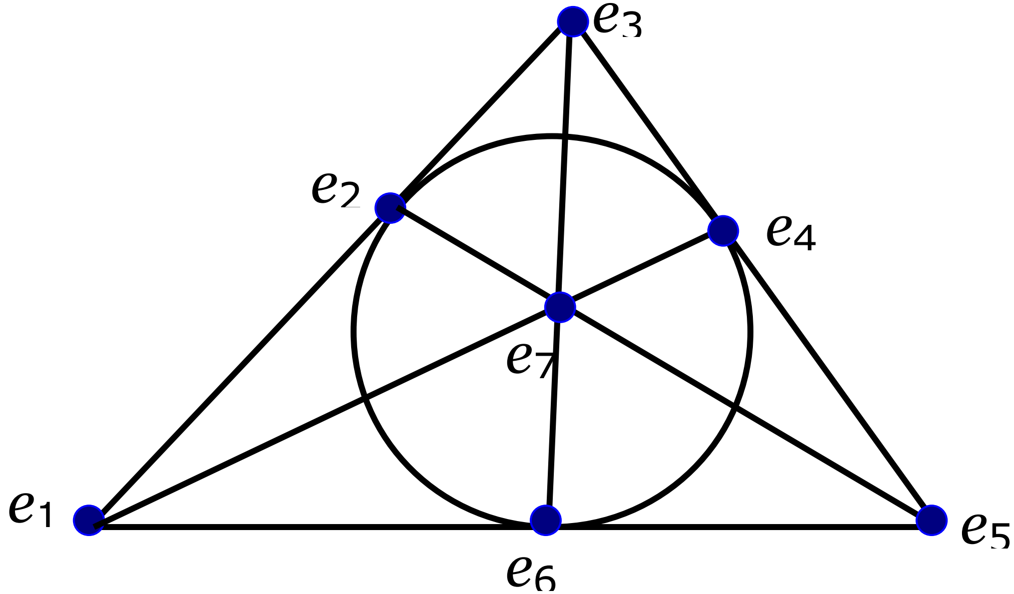
3. Матроид разбиений. Элементами множества E являются дуги некоторого орграфа G, и подмножество множества дуг G считается независимым, если никакие две дуги из этого подмножества не заходят в одну и ту же вершину.

4. Матроид Фано. Пусть $E = \{e_1,\dots, e_7\}$ — множество элементов проективной плоскости порядка 2.

$|E| = n^2 + n + 1$, где n — простое число или степень простого числа.

- Каждые две прямые имеют ровно одну точку пересечения.
- Через любые две точки проходит ровно одна прямая.

Матроид Фано: $A \subset E$ — независимое множество, если $|A| \le 2$ или $|A|=3$ и A не является прямой.



Прямые: $\{e_1, e_2, e_3\}, \{e_3, e_4, e_5\}$, $\{e_5, e_6, e_1\}, \{e_1, e_7, e_4\}, \{e_3, e_7, e_6\}$, $\{e_2, e_7, e_5\}, \{e_2, e_4, e_6\}$

5. k-матроид. E — произвольное конечное множество, и подмножество A множества E считается независимым, если и только если $|A| \le k$.

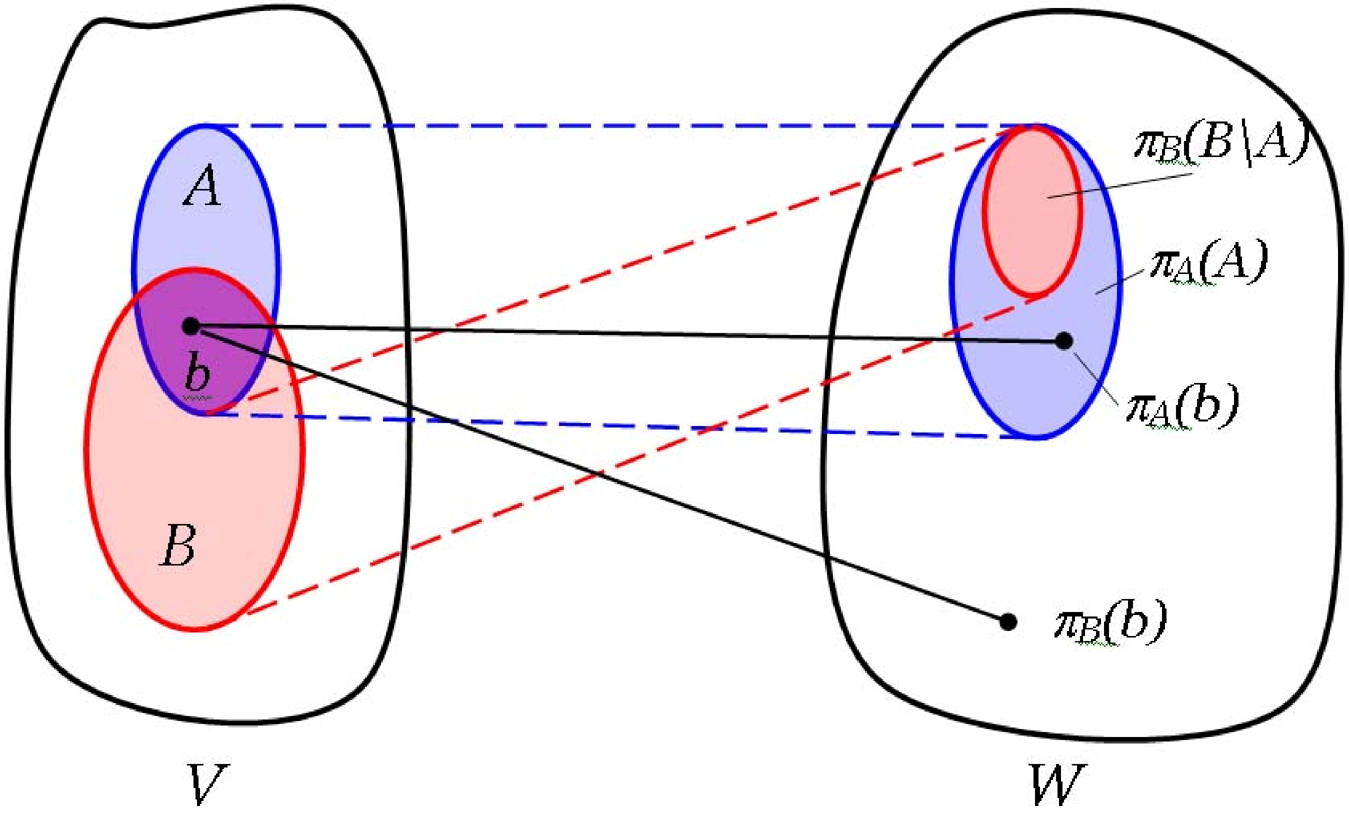
6. Матроид трансверсалей. Пусть $G = (V, W; E)$ — двудольный граф с долями V и W. Подмножество A множества V назовем (частичной) трансверсалью, если в G существует паросочетание, покрывающее все вершины множества A. По теореме Кенига-Оре множество A является трансверсалью, если и только если

$$|N(C)| \geq |C| \quad \forall\, C \subseteq A,$$

где $N(C) = \{w \in W\colon (v, w) \in R\}$.

Теорема 1 (Эдмондс, Фалкерсон). Пусть $G=(V,W;\ R)$ — двудольный граф с долями V и W. Тогда пара $M = [V, \mathfrak{I}\ ]$, где $\mathfrak{I} = \{A \subseteq V \mid A$ — трансверсаль в $G\}$, является матроидом.

Доказательство. Выполнение $(M1)$ очевидно. Пусть $A, B \in \mathfrak{I}$ и $|A|<|B|$. Выберем содержащее $|A|$ ребер паросочетание π_A, покрывающее A и содержащее $|B|$ ребер паросочетание π_B, покрывающее B, так, чтобы они имели максимально возможное число общих ребер. Для каждого $x \in A \cup B$ обозначим через $\pi_A(x)$ (соответственно через $\pi_B(x)$) вершину, соединенную с x ребром, принадлежащим π_A (соответственно, π_B). Для $C \subseteq A \cup B$ определим $\pi_A(C)=\{\pi_A(x) \mid x\in C\}$ и $\pi_B(C) =\{\pi_B(x) \mid x\in C\}$. Если $\pi_B(b')\notin \pi_B(A)$ хотя бы для одного $b'\in B \setminus A$, то $A\cup\{b'\}\in \mathfrak{I}$ и теорема доказана.



Пусть $\pi_B(\{B \setminus A\}) \subseteq \pi_A(A)$. Поскольку $|B| > |A|$, найдется $b \in B$ с $\pi_B(b) \notin \pi_A(A)$. В силу предположения, $b \in A \cap B$. Пусть $c = \pi_A(b)$. Тогда паросочетание $\pi'_A = (\pi_A \backslash (b, c)) \cup (b, \pi_B(b))$ имеет больше общих ребер с π_B чем π_A, что противоречит выбору π_A. ■

Теорема 2. Пусть E — конечное множество, а $\mathfrak{I}$ — непустой набор подмножеств множества E, удовлетворяющее условию (*M*1). При этих предположениях $M = [E, \mathfrak{I}]$ является матроидом, если и только если выполняется условие

(*M*3) Для каждого $C \subset E$ максимальные по включению независимые подмножества множества C имеют одну и ту же мощность.

Доказательство. Пусть M – матроид, но не выполняется (*M*3).

Рассмотрим A, B - два максимальных по включению независимых подмножества некоторого $C \subset E$ такие, что $|A| < |B|$.

Из (*M*2), $\exists\, e \in B \setminus A$: $A \cup \{e\} \in \mathfrak{I}$. Это противоречит максимальности A.

Допустим теперь, что не выполняется (*M*2). Тогда найдутся такие $A, B \in \mathfrak{I}$ с $|A| < |B|$, что $A \cup \{e\} \notin \mathfrak{I}$ для любого $e \in B \setminus A$. Значит, для $C = A \cup B$ не выполняется (*M*3): A — максимальное по включению независимое подмножество множества C, но $|A| < |B|$. ■

Следствие. В любом матроиде все базы имеют одну и ту же мощность.

Ввиду теоремы 2 на подмножествах множества E матроида M определена *ранговая функция*, сопоставляющая каждому $C \subset E$ мощность максимальных (по включению) независимых подмножеств C.

Теорема 3. Пусть $M = [E, \mathfrak{I}]$ является матроидом, а ρ — ранговая функция на 2^E. Тогда

(*R1*) $0 \le \rho(A) \le |A|$;

(*R2*) $A \subset B \Rightarrow \rho(A) \le \rho(B)$;

(*R3*) $\rho(\varnothing) = 0$;

(*R4*) $\rho(A) \le \rho(A \cup \{e\}) \le \rho(A) + 1$;

(*R5*) $\rho(A \cup B) + \rho(A \cap B) \le \rho(A) + \rho(B)$; (субмодулярность)

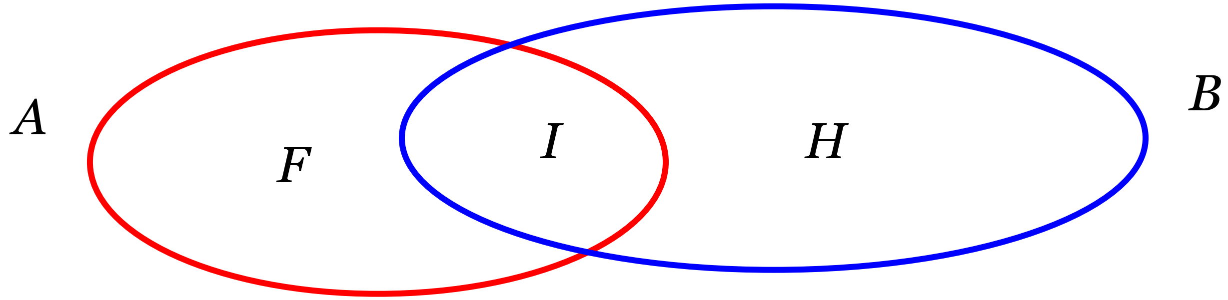
(*R6*) если $\rho(A \cup \{e\}) = \rho(A \cup \{f\}) = \rho(A)$, то $\rho(A \cup \{e, f\}) = \rho(A)$.

Доказательство. Выполнение (*R1*), (*R2*), (*R3*) и (*R4*) очевидно.

Докажем (*R5*). Пусть $I \subseteq A \cap B$, $I \in \mathfrak{I}$, $|I| = \rho(A \cap B)$.

По теореме 2 существуют $F \subseteq A \setminus B$ и $H \subseteq B \setminus A$ такие, что $F \cup I \in \mathfrak{I}$, $F \cup I \cup H \in \mathfrak{I}$, $|F \cup I| = \rho(A)$, $|F \cup I \cup H| = \rho(A \cup B)$.

Но тогда $|H \cup I| \le \rho(B)$ и $\rho(A \cup B) + \rho(A \cap B) = |F| + |H| + 2|I| \le$ $\le \rho(A) + \rho(B)$.



Пусть $\rho(A \cup \{e\}) = \rho(A \cup \{f\}) = \rho(A)$, но $\rho(A \cup \{e, f\}) \ne \rho(A)$.
Возьмем $F \subseteq (A \cup \{e, f\})$, $F \in \mathfrak{I}$, $|F| = \rho(A \cup \{e, f\})$.
Дополним $F_A = (A \cap \mathrm{F})$ до $\bar{F}_A \in \mathfrak{I}$, $|\bar{F}_A| = \rho(A)$ элементами множества A.

Так как $|\bar{F}_A| < |F|$, то по (*M2*) в $F \setminus \bar{F}_A = \{e, f\}$ найдется a: $(\bar{F}_A \cup \{a\}) \in \mathfrak{I}$.

Но тогда $\rho(A \cup \{e\})$ или $\rho(A \cup \{f\})$ превосходит $\rho(A)$. ■

Следствие из (*M*2). Для множества $\mathscr{B}$ баз произвольного матроида $M = [E, \mathfrak{I}]$ верно:

(*B*1) Для любых $B_1 \neq B_2$ и любого $x \in B_1 \setminus B_2$ найдется такой $y \in B_2 \setminus B_1$, что $(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\} \in \mathscr{B}$.

Теорема 4. Пусть E — конечное множество, $\mathscr{B}$ — непустое семейство подмножеств множества E, удовлетворяющее (*B*1). Тогда множество $\mathfrak{I} = \{A \subset E \mid \exists B \in \mathscr{B} : A \subset B\}$ удовлетворяет аксиомам (*M*1) и (*M*2).

Доказательство. Выполнение (*M*1) очевидно.

Покажем, что все члены $\mathscr{B}$ равномощны. Допустим, что это не так. Выберем множества $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$ разной мощности так, чтобы максимизировать мощность пересечения. Можно считать, что $|B_1|>|B_2|$. Выберем произвольно $x \in B_1 \setminus B_2$.

Согласно (*B*1), найдется такой $y \in B_2 \setminus B_1$, что $B = (B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\} \in \mathscr{B}$. Но $|B \cap B_2|>|B_2 \cap B_1|$, $|B|=|B_1|$. Это противоречит выбору B_1 и B_2.

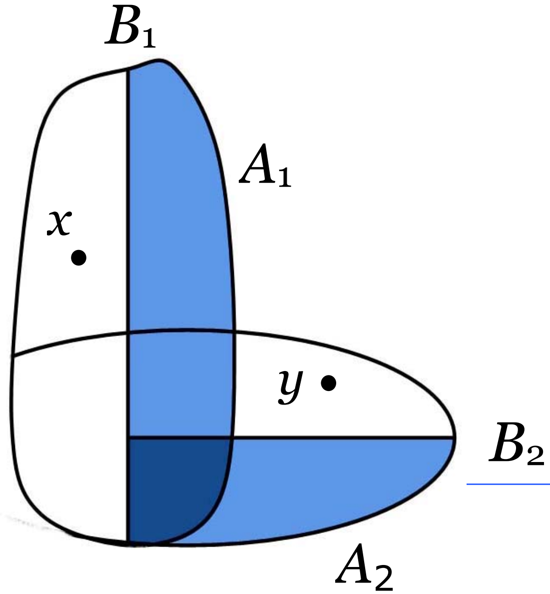
Итак, предположим, что (M2) неверно. Это значит, что для некоторых $A_1, A_2 \in \mathfrak{I}$ с $|A_1|<|A_2|$,

$$A_1 \cup \{e\} \notin \mathfrak{I} \quad \forall\, e \in A_2 \setminus A_1. \tag{1}$$

Выберем $B_1,\ B_2 \in \mathcal{B},\quad B_1 \supset A_1,\quad B_2 \supset A_2$ так, чтобы максимизировать $|B_2 \cap B_1|$. В силу (1),

$$B_1 \cap (A_2 \setminus A_1) = \varnothing. \tag{2}$$

Если $B_1 \setminus A_1 \subset B_2$, то в силу (2) имеем $|B_2| \geq |B_1 \setminus A_1| + |A_2| > |B_1 \setminus A_1| + |A_1| = |B_1|$. Значит, найдется $x \in B_1 \setminus (A_1 \cup B_2)$. Согласно ($B$1), найдется такой $y \in B_2 \setminus B_1$, что $B = (B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\} \in \mathcal{B}$. Но $|B \cap B_2| > |B_2 \cap B_1|$ и $B \supset A_1$. Это противоречит выбору B_1 и B_2. ■



Теорема 5. Пусть $M = [E, \mathfrak{I}]$ — матроид. Тогда для любых членов C и D семейства $\mathfrak{C}$ циклов в M выполняются условия:

- (C1) если $C \subset D$, то $C = D$;
- (C2) если $C \neq D$ и $e \in C \cap D$, то найдется цикл $F \subset (C \cup D) \setminus \{e\}$.

И наоборот, если для любых множеств C и D из некоторого семейства $\mathfrak{C}$ подмножеств E выполнены условия (C1) и (C2), то $\mathfrak{C}$ является семейством циклов некоторого матроида на E.

Доказательство. "$\Rightarrow$" Выполнение (C1) очевидно.

Докажем выполнение (C2). Пусть $C \neq D$ и $e \in C \cap D$. Обозначим $A = C \cap D$. По условию, $A \in \mathfrak{I}$. Допустим, что $(C \cup D) \setminus \{e\}$ независимо. Тогда по теореме 2 найдется независимое множество $B \subset C \cup D$ с $|B| = |C \cup D| - 1$ такое, что $B \supset A$. Но в этом случае $B \supset C$ или $B \supset D$.

"$\Leftarrow$" Пусть для любых множеств C и D из некоторого семейства $\mathfrak{C}$ подмножеств E выполнены условия ($C1$) и ($C2$).

Обозначим $\mathfrak{I} = \{A \subseteq E : \forall C \in \mathfrak{C} : C \setminus A \neq \varnothing\}$. Выполнение ($M1$) очевидно.

Предположим, что условие ($M2$) не выполняется.

Выберем пару (A, B) множеств из $\mathfrak{I}$, противоречащих ($M2$), с максимальной мощностью пересечения, а среди таких — пару с минимальной мощностью A.

Пусть $A = \{x_1,..., x_m, a_1, ..., a_k\}$, $B = \{x_1, ..., x_m, b_1,..., b_p\}$, $p > k$, $A \cup \{b_i\} \notin \mathfrak{I}$ при любом $1 \leq i \leq p$. Это означает, что

$$\forall\, i,\ 1 \leq i \leq p \quad \exists\, C_i \in \mathfrak{C} :\ C_i \subseteq A \cup \{b_i\}.$$

По выбору (A, B), для пары $(A \setminus \{a_1\}, B)$ найдется b_1 с $F = (A \setminus \{a_1\}) \cup \{b_1\} \in \mathfrak{I}$. Снова по выбору (A,B) существует b_2 с $D = F \cup \{b_2\} \in \mathfrak{I}$. Но по ($C2$) найдется $C \in \mathfrak{C}$, $C \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{a_1\} = D \setminus \{a_1\}$, что противоречит $D \in \mathfrak{I}$.■