МАТРОИДЫ-2.

Матроидом будем называть произвольную пару $M = [E, \mathfrak{J}]$, где E — конечное множество, а $\mathfrak{J}$ — непустое семейство подмножеств множества E, удовлетворяющее условиям:

(*M*1) из $(A \in \mathfrak{J}, B \subset A)$ следует, что $B \in \mathfrak{J}$;

(*M*2) $\forall A, B \in \mathfrak{J}$, таких, что $|A| < |B|$, всегда найдется $e \in B \backslash A$: $A \cup \{e\} \in \mathfrak{J}$.

Множества семейства $\mathfrak{J}$ назовем ***независимыми множествами***, а все другие подмножества E — *зависимыми множествами* матроида M.

Элемент $e \in E$ назовем *зависимым* от множества A, если $\rho(A \cup \{e\}) = \rho(A)$.

Обозначим $sp(A)$ максимальное по включению множество такое, что $\rho(sp(A)) = \rho(A)$. $sp(A)$ – оболочка множества A.

Утверждение. Пусть $M = [E, \mathfrak{I}]$ — матроид. Тогда любое подмножество $A \subseteq E$ имеет единственную оболочку.

Доказательство. Пусть S_1, S_2 – две оболочки множества A и $S_1 \backslash S_2 \neq \emptyset$. В силу максимальность S_1 и S_2, $\rho(S_2 \cup \{e\}) > \rho(A)\ \ \forall e \in S_1 \backslash S_2$.

Возьмем $P \subseteq A$: $P \in \mathfrak{I}$ и $\rho(P) = \rho(A)$.

Дополним P до $\bar{P} \subseteq S_2 \cup \{e\}$: $\bar{P} \in \mathfrak{I}$ и $\rho(\bar{P}) = \rho(S_2 \cup \{e\})$.

Очевидно, $e \in \bar{P}$, откуда $\bar{P} \subseteq S_1$, но тогда $\rho(S_1) \geq \rho(\bar{P}) > \rho(A)$.

Противоречие. ■

Если $A = sp(A)$, будем говорить, что A является подпространством матроида.

Теорема. Пусть $M = [E, \mathfrak{J}]$ — матроид.
Для произвольных $A, B \subseteq E$ и $e, f \in E \backslash A$ имеем:

(S1) $A \subseteq sp(A)$;
(S2) Если $A \subseteq B$, то $sp(A) \subseteq sp(B)$;
(S3) $sp(sp(A)) = sp(A)$;
(S4) Если $f \notin sp(A)$ и $f \in sp(A \cup \{e\})$, то $e \in sp(A \cup \{f\})$.

Доказательство. (S1) очевидно.

Пусть $A \subseteq B$ и $e \in sp(A)$. Тогда

$$\rho(B) \leq \rho(B \cup \{e\}) = \rho\big((A \cup \{e\}) \cup B\big) \leq$$

$$\leq \rho(A \cup \{e\}) + \rho(B) - \rho(A \cup (B \cap \{e\}) =$$

$$= \rho(A) + \rho(B) - \rho(A) = \rho(B)$$

Следовательно, $e \in sp(B)$.

Из ($S1$) и ($S2$) следует, что $sp(A) \subseteq sp(sp(A))$. Докажем обратное включение.

Пусть $e \in sp(sp(A))$, т.е. $\rho(sp(A) \cup \{e\}) = \rho(sp(A))$.

Имеем $\rho(A) \leq \rho(A \cup \{e\}) \leq \rho(sp(A) \cup \{e\}) = \rho\big(sp(A)\big) = \rho(A)$, т.е. $e \in sp(A)$.

($S4$) вытекает из определения зависимости элемента от множества:

предположим, что $f \notin sp(A)$ и $f \in sp(A \cup \{e\})$. Имеем

$$\rho(A) + 1 = \rho(A \cup \{f\}) \leq \rho(A \cup \{e, f\}) = \rho(A \cup \{e\}) \leq \rho(A) + 1$$

Отсюда $\rho(A \cup \{f\}) = \rho(A \cup \{e, f\})$, т.е. $e \in sp(A \cup \{f\})$. ■

Заметим, что из ($S3$) следует, что $sp(A)$ является подпространством матроида. Поэтому $sp(A)$ будем называть еще подпространством, натянутым на множество A.

Укажем на связь матроидов со структурами, на которых хорошо работают *"жадные"* алгоритмы.

Пусть E — конечное множество, $\mathfrak{I}$ — подсемейство подмножеств множества E и $w: E \to \mathbb{R}^+$ — весовая функция. Требуется найти

$$\max_{S\in\mathfrak{I}}\left(\sum_{e\in S} w(e)\right) \qquad (3)$$

и множество S, на котором максимум достигается.

"Жадный" алгоритм

1. Упорядочить E так, чтобы $w(e_1) \geq w(e_2) \geq \cdots \geq w(e_n)$;
2. $S := \varnothing$;
3. *for* $i := 1$ *to* n *do*

   if $S \cup \{e_i\} \in \mathfrak{I}$ *then* $S := S \cup \{e_i\}$;

Теорема (Радо, Эдмондс). Если $M = [E, \mathfrak{I}]$ — матроид, то множество S, найденное "жадным" алгоритмом, является решением задачи (3). Напротив, если $M = [E, \mathfrak{I}]$ — не матроид, то найдется функция весовая функция w, для которой это S не будет оптимальным.

Доказательство. Пусть $M = [E, \mathfrak{I}]$ — матроид, $S = \{s_1, \dots, s_k\}$ — множество, найденное "жадным" алгоритмом, причем $w(s_1) \geq w(s_2) \geq \cdots \geq w(s_k)$. Отметим сначала, что S — база матроида M, поскольку отбрасывались лишь элементы, зависимые от S. Пусть $T = \{t_1, \dots, t_k\}$ — другая база M и $w(t_1) \geq w(t_2) \geq \cdots \geq w(t_k)$.

Предположим, что $w(t_i) > w(s_i)$ для некоторого i.

Рассмотрим независимые множества $A = \{s_1, \dots, s_{i-1}\}$ и $B = \{t_1, \dots, t_i\}$. Согласно (M2) найдется такое j, $1 \leq j \leq i$, что $A \cup \{t_j\} \in \mathfrak{I}$.

Но $w(t_j) \geq w(t_i) > w(s_i)$.

Значит, $w(t_i) \leq w(s_i)$ для каждого i, и S — решение (3).

Предположим теперь, что $M = [E, \mathfrak{I}]$ не является матроидом.

Случай 1. Найдутся $B \in \mathfrak{I}$ и $A \notin \mathfrak{I}$ такие, что $A \subset B$. Положим

$$w(e) = \begin{cases} 2, & e \in A, \\ 1, & e \in B \setminus A, \\ 0, & e \in E \setminus B. \end{cases}$$

Искомым множеством в задаче (3) является B и $\sum_{e \in B} w(e) = |B| + |A|$. Но при работе "жадного" алгоритма кандидатами в S вначале будут рассматриваться элементы множества A, и хотя бы один из них не будет включен в S.

Случай 2. Аксиома $(M1)$ выполняется для $\mathfrak{I}$, но найдутся $B \in \mathfrak{I}$ и $A \in \mathfrak{I}$ такие, что $|A| < |B|$ и $A \cup \{e\} \notin \mathfrak{I}$ для любого $e \in B \backslash A$.

Обозначим $m = |B|$. Положим

$$w(e) = \begin{cases} 1 + {}^{1}\!/_{m}, & e \in A, \\ 1, & e \in B \backslash A, \\ 0, & e \notin B \cup A. \end{cases}$$

Тогда "жадный" алгоритм сначала включит в S все элементы множества A, а затем ни один элемент множества $B \backslash A$ не добавится к S.

Следовательно, суммарный вес элементов множества S будет равен $|A|(m+1)/m \le (m-1)(m+1)/m < m$. Но оптимальное решение задачи (3) не меньше чем $|B| = m$. ∎

Пример. Задан граф $G = (V, E)$ с весовой функцией w. Найти остовное дерево максимального веса.

Алгоритм Крускала

1. Упорядочить ребра $w(e_1) \geq w(e_2) \geq \cdots \geq w(e_n)$;
2. $S := 0$;
3. *for* $i := 1$, *to* k *do*

   if $S \cup \{e_i\}$ — дерево, *then* $S := S \cup \{e_i\}$

Как найти остовное дерево минимального веса?