Лекция 8. Двухуровневое программирование

Екатерина Вячеславовна Алексеева

Новосибирский Государственный Университет
Факультет Информационных Технологий
http://math.nsc.ru/~alekseeva/

19 мая, 2012 г.

Содержание лекции

Задача двухуровневого программирования (ДП)

$$\max_x f_1(x,y) \tag{1}$$

$$g_1(x,y) \le b_1, \tag{2}$$

где y — оптимальное решение задачи $A(x)$:

$$\max_y f_2(x,y) \tag{3}$$

$$g_2(x,y) \le b_2. \tag{4}$$

Основные определения

Полудопустимое решение

Пара (x, y) *называется полудопустимым решением задачи , если она удовлетворяет ограничениям (2),(4).*

Допустимое решение

Пара (x, y) *называется допустимым решением задачи , если выполняются ограничения (2) и* y *— оптимальное решение задачи* $A(x)$*.*

Оптимальное решение

Допустимое решение (x^*, y^*) *называется оптимальным, если для любого допустимого решения* (x, y) *справедливо неравенство* $f_1(x^*, y^*) \geq f_1(x, y)$*.*

Задача ДП называется *невырожденной*, если для любого x задача $A(x)$ имеет единственное оптимальное решение.

Пример существования полудопустимого решения и отсутствие допустимых решений

$$\max_x \{ x \mid 1 + y \le x \le 2,\ x \ge 0 \},$$

где y — оптимальное решение задачи

$$\max_y \{ y \mid y \le x,\ y \ge 0 \}.$$

- $x = 2,\ y = 0$ — полудопустимое решение

Пример существования полудопустимого решения и отсутствие допустимых решений

$$\max_x \{x \mid 1 + y \le x \le 2,\ x \ge 0\},$$

где y — оптимальное решение задачи

$$\max_y \{y \mid y \le x,\ y \ge 0\}.$$

- $x = 2,\ y = 0$ — полудопустимое решение
- при любом выборе $x \ge 0$ оптимальное решение y совпадает с x (нарушается условие $1 + y \le x$)

Сложность решения задачи ДП

Теорема

Поиск допустимого решения задачи (1)—(4) является NP-полной задачей в сильном смысле.

Сложность решения задачи ДП

Доказательство

Задача о покрытии

- *Дано*
  набор подмножеств $J_i \subseteq J, \; i \in I$
  целое положительное число $K \leq |I|$.
- *Требуется найти такое подмножество* $I' \subset I$, *что* $|I'| \leq K$ *и любой элемент* $j \in J$ *принадлежит по крайней мере одному подмножеству* $J_i, \; i \in I'$.

Решим задачу о покрытии с помощью задачи поиска допустимого решения.

Доказательство (продолжение)

Рассмотрим следующую задачу поиска допустимого решения.

- *Найти пару (x, y), для которой выполнены условия:*

$$\sum_{i \in I} x_i \le K, \qquad \sum_{j \in J} y_j \le 0, \qquad 0 \le x_i \le 1, \quad i \in I,$$

и y — оптимальное решение задачи

$$\max_y \Big\{ \sum_{j \in J} y_j \;\Big|\; y_j \ge 0,\ y_j \le 1 - x_i, \quad j \in J_i,\ i \in I \Big\}.$$

Убедимся в том, что подмножество I' существует $\Longleftrightarrow$ в данной задаче существует допустимое решение.

Доказательство (продолжение)

($\Longleftarrow$) Предположим, что такое решение существует.
Тогда из условий $\sum_{j\in J} y_j \leq 0$, следует, что $y_j = 0,\ j \in J$.
Так как y — оптимальное решение внутренней задачи, то для любого $j \in J$ существует такой номер $i \in I$, что $j \in J_i$ и $x_i = 1$.
Полагая $I' = \{i \in I | x_i = 1\}$, получаем требуемое подмножество I'.

Доказательство (продолжение)

($\Longrightarrow$) Предположим, что в задаче о покрытии существует подмножество I' с требуемыми свойствами.
Тогда полагая

$$y_j = 0,\ j \in J; \qquad x_i = \begin{cases} 1, & \text{если} \ \ i \in I', \\ 0, & \text{если} \ \ i \notin I', \end{cases}$$

получаем допустимое решение.

Задача двухуровневого линейного программирования (ДЛП)

$$\max_{x \geq 0} cx + dy \tag{5}$$

$$Ax + By \leq b, \tag{6}$$

где y — оптимальное решение линейной задачи о рюкзаке:

$$\max_{y \geq 0} \alpha x + \beta y \tag{7}$$

$$\gamma y \leq 1, \tag{8}$$

$$y \leq x. \tag{9}$$

Переменные x и y имеют одинаковую размерность,
$x = (x_i),\ y = (y_i),\ i \in I = \{1, 2, ..., n\}$,
A, B — матрицы с рациональными элементами,
$c, d, b, \alpha, \beta \geq 0, \gamma \geq 0$ — вектора с рациональными компонентами.

Сложность решения задачи ДЛП

Теорема

Для любой невырожденной задачи (5)–(9) существует полиномиальный алгоритм, который либо находит оптимальное решение, либо позволяет установить, что задача неограничена или не имеет допустимых решений.

Без доказательства.

Задача ДЛП с дополнительными ограничениями

Пусть в задаче (7)–(9) переменные y не могут превышать заданных значений y^0.
Тогда задача принимает вид

$$\max_{x \geq 0} cx + dy \tag{10}$$

$$Ax + By \leq b, \tag{11}$$

где y — оптимальное решение задачи:

$$\max_{y \geq 0} \alpha x + \beta y, \tag{12}$$

$$\gamma y \leq 1, \quad y \leq x, \quad y \leq y^0. \tag{13}$$

При заданных значениях x переменные y по-прежнему легко и однозначно вычисляются, но этого оказывается недостаточно для построения эффективного алгоритма поиска оптимального решения.

Задача ДЛП с дополнительными ограничениями

Теорема

Задача отыскания оптимального решения задачи (10)–(13) является NP-трудной.

Доказательство

Покажем, что задача о рюкзаке с булевыми переменными

$$\max_z \left\{ \sum_{i \in I} c_i z_i \middle| \sum_{i \in I} a_i z_i \le b,\ z_i \in \{0,1\},\ i \in I \right\}$$

сводится к задаче отыскания оптимального решения задачи (10)–(13). Для этого рассмотрим ее частный случай

$$\max_{x \ge 0} \left\{ \sum_{i \in I} c_i (x_i - y_i) \middle| \sum_{i \in I} a_i y_i \le b,\ x_i \le 2,\ i \in I \right\}, \qquad (14)$$

где y — оптимальное решение задачи

$$\max_{y \ge 0} \left\{ \sum_{i \in I} y_i \middle| y_i \le x_i,\ i \in I, y_i \le 1,\ i \in I \right\}. \qquad (15)$$

Доказательство (продолжение)

Убедимся в том, что оптимальные решения этих двух задач связаны между собой соотношениями:

$$x_i^* = 2z_i^*; \quad y_i^* = z_i^*, \ i \in I.$$

Пусть (z_i^*), $i \in I$ *— оптимальное решение задачи о рюкзаке.*
Положим $x_i = 2z_i^*$, $y_i = z_i^*$, $i \in I$. *Построенное решение является допустимым решением в задаче (14)–(15):*
удовлетворяет ограничениям задачи (14),
y_i, $i \in I$ *— единственное оптимальное решение задачи (15).*
Кроме того, значения целевых функций на данных решениях совпадают:

$$\sum_{i \in I} c_i z_i^* = \sum_{i \in I} c_i (x_i - y_i).$$

Доказательство (продолжение)

Обратно, пусть $(x_i^*), (y_i^*),\ i \in I$ *— оптимальное решение задачи (14)–(15). Тогда решение*

$$x_i = \begin{cases} 2, & \text{если } x_i^* > 1, \\ 0, & \text{если } x_i^* \leq 1, \end{cases} \qquad y_i = \min(1, x_i), \quad i \in I, \tag{16}$$

является оптимальным решением задачи (14)–(15):
если $x_i^* > 1$, *то* $x_i^* = 2$, *иначе* x_i^* *— не оптимальное решение.*
Значит, $x_i = x_i^*$, *при* $x_i^* > 1$.
Пусть $x_i^* \leq 1$ *для некоторого* $i \in I$. *Тогда*
$x_i = 0,\ y_i = 0$ *— новое допустимое решение с тем же значением целевой функции.*
Таким образом, среди оптимальных решений всегда существует решение вида (16).
Полагая $z_i = y_i,\ i \in I$, *получаем допустимое решение задачи о рюкзаке, для которого*

$$\sum_{i \in I} c_i(x_i^* - y_i^*) = \sum_{i \in I} c_i z_i.$$

Рекомендуемая литература

- М. Гэри, Д. Джонсон Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982
- Ю. А. Кочетов, А. В. Плясунов Полиномиально разрешимый класс задач двухуровневого линейного программирования // Дискретн. анализ и исслед. опер., сер. 2, 1997, том 4, номер 2, страницы 23–33 `http://www.mathnet.ru`